Série A,
N° 4261
N° d'ordre :
5112

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

MARTHE **GRANDET** NÉE **HUGOT**

1re THÈSE. — ENSEMBLES FERMÉS D'ENTIERS ALGÉBRIQUES.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 1er juin 1964 devant la Commission d'examen.

MM. DUBREIL *Président.*
KAHANE, PISOT } *Examinateurs*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & Cie, ÉDITEUR-IMPRIMEUR
Quai des Grands-Augustins, 55

1965

Série A,
N° 4261
N° d'ordre :
5112

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Marthe GRANDET née **HUGOT**

1re THÈSE. — Ensembles fermés d'entiers algébriques.

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 1er juin 1964 devant la Commission d'examen.

MM. DUBREIL *Président.*
KAHANE, PISOT *Examinateurs*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & Cie, ÉDITEUR-IMPRIMEUR
Quai des Grands-Augustins, 55

1965

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen..... M. ZAMANSKY.

JULIA (G.).....	T	Analyse supérieure et algèbre supérieure.
PRENANT.....	T	Anatomie et Histologie comparée.
GRASSÉ.....	T	Évolution des Êtres organisés.
PRÉVOST.....	T	Chimie organique.
WYART.....	T	Minéralogie et Cristallographie.
TEISSIER.....	T	Zoologie.
MANGENOT.....	T	Biologie végétale (Orsay).
AUGER.....	T	Physique quantique et Relativité.
MONNIER.....	T	Physiologie générale.
PIVETEAU.....	T	Paléontologie.
ROCARD.....	T	Physique (E. N. S.).
CARTAN.....	T	Mathématiques (E. N. S.).
LAFFITTE.....	T	Chimie générale.
FAVARD.....	T	Géométrie supérieure.
COULOMB.....	T	Physique du Globe.
Mlle COUSIN.....	T	Biologie animale (S. P. C. N.).
CHRÉTIEN.....	T	Chimie minérale.
DRACH.....	T	Zoologie.
KASTLER.....	T	Physique (E. N. S.).
EPHRUSSI.....	T	Génétique.
RIVIÈRE.....	T	Géologie S. P. C. N. et Sédimentologie (Orsay).
GAUTHERET.....	T	Biologie végétale (P. C. B.).
LUCAS (R.).....	T	Recherches physiques.
THOMAS (A.).....	T	Biologie cellulaire.
ARNULF.....	T	Optique appliquée.
MORAND.....	T	Physique-Enseignement.
SOLEILLET.....	T	Physique (P. C. B.).
FORTIER.....	T	Mécanique expérimentale des Fluides.
PETIT.....	T	Biologie maritime.
QUENEY.....	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
GALLIEN.....	T	Embryologie.
EICHHORN.....	T	Botanique.
DE CUGNAC.....	T	Biologie végétale (S. P. C. N.).
Mlle CAUCHOIS.....	T	Chimie physique.
THELLIER.....	T	Physique du Globe.
L'HÉRITIER.....	T	Biologie générale (Orsay).
GRIVET.....	T	Radioélectricité (Orsay).
PONCIN.....	T	Mécanique générale.
DUBREIL.....	T	Arithmétique et Théorie des Nombres.
QUELET.....	T	Chimie organique.
CAGNIARD.....	T	Géophysique appliquée.
CHAMPETIER.....	T	Chimie macromoléculaire.
CUVILLIER.....	T	Micropaléontologie.
JUNG.....	T	Géologie.
TRILLAT.....	T	Microscopie et diffraction électronique.
WIEMANN.....	T	Chimie organique et structurale.
JACQUINOT.....	T	Spectroscopie et Physique céleste (Orsay).
VASSY.....	T	Physique de l'Atmosphère.
DESTOUCHES.....	T	Théories physiques.
AMIEL.....	T	Chimie générale.
HOCART.....	T	Minéralogie et Cristallographie.
MATHIEU (J.-P.).....	T	Physique (optique.)
COUTEAUX.....	T	Cytologie.
MAY.....	T	Zoologie (Orsay).
CHOQUET.....	T	Théorie des fonctions et Topologie.
FELDMANN.....	T	Biologie végétale marine.
GUINIER.....	T	Physique des Solides (Orsay).
JOST.....	T	Physiologie comparée.
FORTET.....	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
SCHWARTZ.....	T	Calcul différentiel et intégral.
CHOUARD.....	T	Physiologie végétale.
MALAVARD.....	T	Aviation (Techniques aéronautiques).
BRELOT.....	T	Calcul différentiel et intégral.
NORMANT.....	T	Synthèse organique.
BÉNARD.....	T	Chimie minérale.
BUVAT.....	T	Botanique (E. N. S.).
DUGUÉ.....	T	Statistiques mathématiques.
SOULAIRAC.....	T	Psychophysiologie.
ULRICH.....	T	Physiologie végétale appliquée.
MARÉCHAL.....	T	Optique théorique et appliquée.
KIRRMANN.....	T	Théories chimiques.
CHADEFAUD.....	T	Botanique.
Mlle LE BRETON.....	T	Physiologie de la Nutrition.
LELONG.....	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
DEVILLERS.....	T	Anatomie et Hist. comparée.
EHRESMANN.....	T	Topologie algébrique.
FRANÇON.....	T	Physique (S. P. C. N.).
GLANGEAUD.....	T	Géographie physique et Géologie.
GODEMENT.....	T	Mathématiques (M. G. P.).
PISOT.....	T	Technique mathématique de la Physique.
ROCH.....	T	Géologie.
SCHATZMANN.....	T	Astrophysique.
TERMIER.....	T	Géologie générale.
ZAMANSKY.....	T	Mathématiques générales.
LENNUIER.....	T	Physique (M. G. P.).
RIZET.....	T	Génétique (Orsay).
ROUTHIER.....	T	Géologie appliquée.
Mme TONNELAT.....	T	Physique théorique.
DIXMIER.....	T	Mathématiques (M. P. C.).
SOUCHAY.....	T	Chimie générale.
AIGRAIN.....	T	Électrotechnique générale.
BRUSSET.....	T	Chimie systématique.
LÉVY (M.).....	T	Physique théorique des Hautes Énergies (Orsay).
Mme CHAIX.....	T	Chimie biologique.
Mme HUREL-PY.....	T	Biologie végétale (P. C. B.).
PIAUX.....	T	Chimie (M. P. C.).
BRUN.....	T	Mécanique théorique des Fluides.
LEDERER.....	T	Chimie biologique (Orsay).
Mme DUBREIL.....	T	Mathématiques (Agrégation).
Mme LELONG.....	T	Mathématiques II (E. N. S.).
BELLAIR.....	T	Géologie (S. P. C. N.).
COTTE.....	T	Physique-Électricité.
DUBOIS (J.-E.).....	T	Chimie organique.
LAMOTTE.....	T	Zoologie (E. N. S.).
MICHEL (A.).....	T	Chimie minérale (Orsay).
OLMER.....	T	Énergétique générale.
ROUAULT.....	T	Électricité (Orsay).
GAUTHIER.....	T	Mécanique appliquée.
BARCHEWITZ.....	T	Chimie physique.
BROSSEL.....	T	Physique atomique.
BUSER.....	T	Physiologie comparée.
CAMUS.....	T	Physiologie végétale (Orsay).
CASTAING.....	T	Physique II. Thermo. (Orsay).
CURIEN.....	T	Minéralogie et Cristallographie.
MOYSE.....	T	Physiologie végétale (Orsay).
NOIROT.....	T	Évolution des Êtres organisés.
PANNETIER.....	T	Chimie générale.
POSSOMPES.....	T	Zoologie.
PULLMANN.....	T	Chimie quantique.
TEILLAC.....	T	Physique nucléaire et Radioactivité (Orsay).
TONNELAT.....	T	Biologie physicochimique (Orsay).
VILLE.....	T	Économétrie.
WILLEMART.....	T	Chimie (P. C. B.).
DODE.....	T	Chimie (Orsay).
FREYMANN.....	T	Recherches physiques.
GUINOCHET.....	T	Biologie végétale (S. P. C. N.) (Orsay).
ROLLET.....	T	Chimie minérale.
Mlle JOSIEN.....	T	Chimie (S. P. C. N.).
CHEVALLEY.....	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.
ARNOULT.....	T	Électronique (Orsay).
CHAPELLE.....	T	Physique I (Orsay).

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN -

DELANGE	T	Mathématiques I (Orsay).
DENY	T	Mathématiques générales (Orsay).
GERMAIN	T	Mécanique théorique des Fluides.
LUCAS (G.)	T	Géologie.
ALLARD	T	Chimie physique.
BERTHELOT	T	Physique des particules fondamentales (Orsay).
BRICARD	T	Météorologie et Physique de l'Atmosphère.
Mme ALBE-FESSARD	T	Psychophysiologie.
FRIEDEL	T	Physique des solides (Orsay).
JULIA (M.)	T	Études des Moléculaires complexes.
LENDER	T	Biologie animale (S. P. C. N.) (Orsay).
MAGAT	T	Physicochimie des radioéléments.
Mlle QUINTIN	T	Électrochimie.
MONOD	T	Chimie du métabolisme.
BENOIST	T	Physiologie animale (Orsay).
DE POSSEL	T	Analyse numérique.
CHARLOT	T	Chimie analytique.
LEMÉE	T	Écologie végétale (Orsay).
GUÉRIN	T	Chimie (M. P. C.) (Orsay).
CHATELET (M.)	T	Chimie (P. C. B.)
JEAN	T	Physique nucléaire (Orsay).
MATTLER	T	Physique (S. P. C. N.).
BERGERARD	T	Zoologie (Orsay).
BERTEIN	T	Électronique (Orsay).
BOUISSIÈRES	T	Radiochimie.
Mme COUTURE	T	Thermodynamique et Mécanique physique.
ELLENBERGER	T	Géologie des grandes régions du Globe.
FRANC	T	Biologie animale (P. C. B.).
SCHNELL		Botanique tropicale.
STOLKOWSKI	T	Physiologie végétale.
ACHER	T	Chimie biologique.
BAUDOIN		Biologie animale (P. C. B.).
BEAUMONT		Biologie animale (S. P. C. N.).
BLAMONT	T	Géophysique-Ionosphère.
BOURREAU	T	Botanique.
CURIE (D.)		Physique (M. G. P.).
DURAND-DELGA	T	Géologie.
FRÉON	T	Chimie organique (Orsay).
HELLER	T	Physiologie végétale.
TORTRAT	T	Calcul des Probabilités.
CAILLEUX	T	Géologie (S. P. C. N.).
MAGNAN	T	Physique (S. P. C. N.).
DAUDEL	T	Mécanique ondulatoire appliquée à la Chimie théorique et à la Physique nucléaire.
Mlle FOURCROY		Biologie végétale (S. P. C. N.).
Mme CHOQUET-BRUHAT	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
Mlle VEIL	T	Physiologie générale.
LWOFF	T	Microbiologie.
SIESTRUNCK	T	Mécanique physique et expérimentale.
LACOMBE	T	Métallurgie des métaux nucléaires (Orsay).
BROCHARD	T	Physique P. C. B. (Orsay).
CABANNES	T	Mécanique générale.
LESIEUR	T	Mathématiques I (Orsay).
MAZET	T	Mécanique générale (Orsay).
CAIRE		Géographie physique et Géologie dynamique.
COMOLET	T	Mécanique des Fluides.
CORABŒUF	T	Physiologie animale (Orsay).
DELLOUE		Physique de l'exosphère.
GORENFLOT		Botanique II (Orsay).
HOUILLON		Biologie animale (P. C. B.).
JULLIEN (J.)		Chimie (S. P. C. N.) (Orsay).
MALGRANGE	T	Technique mathématique de la Physique (Orsay).
OLIVIER		Anthropologie.
NOZERAN	T	Botanique II (Orsay).
BLANC-LAPIERRE	T	Physique (E. N. S.) (Orsay).
CHEVAUGEON	T	Botanique (Orsay).
KAHANE	T	Mathématiques (Orsay).
SAMUEL	T	Mathématiques (E. N. S.) fémin.
KOURGANOFF	T	Astronomie (Orsay).
THIRY	T	Mécanique céleste.
ABELÈS		Physique (S. P. C. N.).
AMAT	T	Physique (P. C. B.).
AUBOIN	T	Géologie.
Mme BENOIT-GUEUTAL	T	Physique nucléaire et radioactivité (Orsay).
BOUGIS		Biologie marine (Villefranche-sur-Mer).
BRUHAT	T	Mathématiques (M. P. C.).
BRUNN	T	Géologie historique (Orsay).
CHABBAL	T	Physique (M. G. P.) (Orsay).
DEHEUVELS	T	Mathématique propédeutique.
D'ESPAGNAT	T	Physique théorique (Orsay).
FURON	T	Géologie (S. P. C. N.).
Mme GANS	T	Génétique.
GENEVÈS		Biologie végétale (P. C. B.).
GUILBERT		Physique (C. U. S. Orléans).
HUPE	T	Pétrographie.
HOLLANDE	T	Biologie générale.
LIONS	T	Analyse numérique.
MAITTE	T	Chimie (P. C. B.).
MEYER		Physique propédeutique.
NICOLAS		Géologie appliquée.
PANIGEL		Biologie générale.
RAVIER		Pétrographie.
ROSEAU	T	Mécanique théorique des Fluides.
ROUBINE	T	Électronique.
SILBER	T	Chimie (P. C. B.).
UEBERSFELD	T	Électronique.
YVON	T	Théories physiques.
HERVÉ	T	Mathématiques.
NÉRON	T	Mathématiques (M. P. C.) (Orsay).
Mme PECKER-WIMEL	T	Astrophysique.
BALKANSKY		Physique (M. P. C.).
LE CORRE	T	Électricité.
DELCROIX	T	Physique théorique (Orsay).
GOURDIN		Physique théorique des Hautes Énergies (Orsay).
LEHMANN	T	Physique expérimentale des Hautes Énergies (Orsay).
NATAF	T	Physique nucléaire et radioactivité (Orsay).
ÉCHALIER		Biologie animale (P. C. B.).
BARRAUD		Physiologie cellulaire.
LIORET		Physiologie végétale (Orsay).
DARS		Géologie structurale et Géologie appliquée.
CAMEFORT	T	Botanique (Agrégation).
VICHNIEWSKY	T	Mécanique industrielle.
BLAQUIÈRE		Électronique (Orsay).
ARNOUS	T	Physique théorique.
TATIBOUET		Chimie (C. S. U. Orléans).
MALLIAVIN	T	Mathématique propéd. (Orsay).
GAUDEMAR		Chimie propédeutique.
PEREZ Y JORBA		Physique expérimentale des Hautes Énergies (Orsay).
DAVID	T	Chimie (Agrégation, Orsay).
BROUSSE	T	Mécanique théorique.

Secrétaire général..... R. POULLAIN.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550011_0035

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 82, 1965, p. 1 à 35.

ENSEMBLES FERMÉS D'ENTIERS ALGÉBRIQUES (1)

PAR Mme MARTHE GRANDET-HUGOT.

INTRODUCTION.

L'objet de ce travail est l'étude des ensembles dérivés successifs de certains ensembles fermés d'entiers algébriques sur le corps des rationnels, ou sur un corps quadratique imaginaire.

Soit S(K) l'ensemble défini de la manière suivante : *Un nombre* $\theta \in S(K)$, *si* θ *est un entier algébrique sur* K, *si* $|\theta| > 1$ *et si tous ses conjugués autres que lui-même sont, en module, inférieurs à* 1. (K étant soit le corps des rationnels, soit un corps quadratique imaginaire).

On voit facilement que l'ensemble $S = S(Q)$ est l'intersection de tous les ensembles S(K). De plus, si θ est imaginaire, alors $\theta \in \overline{S}_2$, *ensemble des entiers algébriques sur* Q *qui sont imaginaires et ont un seul conjugué autre qu'eux-même de module supérieur à* 1, *les autres étant de module inférieur à* 1. Mais tout nombre de $\overline{S}_2$ n'appartient pas nécessairement à un ensemble S(K), en effet, il faut, pour cela, que tous ses conjugués soient imaginaires, et même, cette condition n'est pas suffisante; par exemple : si θ est l'un des zéros supérieurs à 1, en module, de $z^6 + z^4 - 1$, alors $\theta \in \overline{S}_2$, mais n'appartient à aucun ensemble S(K).

(1) *Thèse Sc. math.*, Paris, 1964.

Le lemme de Minkowski permet de montrer qu'il y a des nombres de S dans toute extension réelle de Q, et même des unités algébriques. Et dans toute extension imaginaire de Q, il y a des nombres de $\overline{S}_2$ et même des unités algébriques [11]. On démontre de manière analogue que, dans toute extension d'un corps quadratique imaginaire K, il y a des nombres de S(K) et même des unités algébriques de cette extension.

Les nombres $0 \in S$ interviennent dans un certain nombre de questions : approximations rationnelles des nombres algébriques, répartition modulo 1 [11], ensembles d'unicité des séries trigonométriques [15]. Certaines de ces propriétés s'étendent aux ensembles S(K) (approximations, répartition modulo 1).

En associant à l'ensemble S, une famille de fractions rationnelles bornées par 1, en module, sur la circonférence-unité, M. Salem a montré que *l'ensemble* S *est fermé dans la topologie de la droite réelle* [11]. On montre d'une manière analogue que *l'ensemble* $S \cup \overline{S}_2$ *et les ensembles* S(K) *sont des ensembles fermés* ([9], [10]).

De plus, l'étude de ces fractions rationnelles permet d'obtenir des propriétés des ensembles dérivés successifs de S(K).

Dans le chapitre I, nous étudierons les propriétés de fonctions méromorphes à l'intérieur du cercle-unité et bornées par 1, en module, sur la circonférence-unité. Nous pourrons alors écrire certaines inégalités entre les coefficients de leur développement en série de Taylor au voisinage de l'origine; ces inégalités généralisent celles qui ont été obtenues par M^lle Chamfy [1]. Parmi ces fonctions, nous considérerons plus particulièrement les fractions rationnelles.

Dans le chapitre II, nous caractériserons les ensembles S″(K), dérivés seconds de S(K). Nous pourrons alors écrire des inégalités entre les coefficients de Taylor des fractions rationnelles associées à ces nombres.

Dans le chapitre III, nous étendrons ces résultats aux ensembles dérivés $h^{\text{ièmes}}$ $S^{(h)}(K)$.

Enfin, dans le chapitre IV, nous appliquerons ces résultats à la recherche des plus petits éléments, en module, de certains des ensembles étudiés.

La plupart des résultats exposés ici s'étendent facilement aux ensembles S_η définis par M. Pisot [1], qui sont des ensembles fermés de nombres algébriques.

Certains de ces résultats ont fait l'objet de Notes à l'Académie des Sciences ([8], [9]).

CHAPITRE I.

Fonctions méromorphes a l'intérieur du cercle-unité.

Nous rappellerons d'abord les résultats obtenus par Schur [17] dans le cas des fonctions holomorphes et par M^lle Chamfy [1] dans le cas des fonctions méromorphes. Puis nous donnerons une méthode pratique pour former les inégalités entre les coefficients du développement en série de Taylor d'une fonction méromorphe; nous nous intéresserons ensuite au cas particulier des fractions rationnelles.

1. Fonctions holomorphes [17]. — Nous appellerons fonction de Schur, une fonction $F(z)$ holomorphe dans le cercle-unité et bornée par 1, en module, pour $|z| \leq 1$. Soit

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

au voisinage de l'origine.

D'après le principe du module maximum, on a alors

$$|c_0| \leq 1.$$

Considérons la suite des fonctions ainsi définies :

$$F_0(z) = F(z)$$

$$F_{n+1}(z) = \frac{F_n(z) - \gamma_n}{1 - \bar{\gamma}_n F_n(z)} \frac{1}{z}, \qquad \text{où} \quad \gamma_n = F_n(0).$$

Si $F_n(z)$ est une fonction de Schur non constante, alors $F_{n+1}(z)$ est aussi une fonction de Schur.

Si $F_n(z)$ est une constante de module différent de 1, $F_{n+1}(z)$ est définie et égale à zéro en tout point sauf à l'origine, nous poserons alors $F_{n+1}(0) = 0$ pour tout z tel que $|z| \leq 1$, alors $F_m(0) = 0$ pour $m > n$, donc $\gamma_m = 0$ pour $m > n$ et $F_{n+1}(z) = 0$ dans $|z| \leq 1$, on peut alors dire que $F_m(z) \equiv 0$ dans $|z| \leq 1$ pour $m > n$, et que $\gamma_m = 0$ pour $m > n$.

Si $|F_{n+1}(0)| = 1$, $F_{n+1}(z)$ n'est définie au aucun point et $F_n(z)$ est une constante de module 1.

On peut ainsi former, à partir de $F(z)$, une suite de fonctions $F_n(z)$: ou bien cette suite est infinie [les fonctions $F_n(z)$ pouvant éventuellement être identiquement nulles à partir d'un certain rang], ou bien elle s'achève par une fonction constante, de module 1, dans le cercle-unité.

A une fonction de Schur $F(z)$, nous associerons la suite des coefficients $\gamma_n = F_n(0)$, qui s'expriment rationnellement en fonction de $c_0, \ldots, c_n$ et de leurs imaginaires conjugués. Ou bien cette suite est infinie (avec éventuellement $\gamma_m = 0$ pour $m \geq n_0$), ou bien elle s'achève en un rang s où $|\gamma_s| = 1$, dans ce cas, nous dirons que $F(z)$ est une fonction de Schur de rang s, et dans le premier cas, nous dirons que $F(z)$ est une fonction de Schur de rang infini. Schur a montré que, pour que $F(z)$ soit une fonction de Schur de rang s, il faut et il suffit que

$$F(z) = \frac{\tilde{Q}(z)}{Q(z)},$$

$\tilde{Q}(z)$ et $Q(z)$ étant deux polynomes premiers entre eux, de degré s, $Q(z)$ n'ayant pas de zéro intérieur au cercle-unité et tels que

$$\tilde{Q}(z) \equiv \varepsilon z^s \overline{Q}\left(\frac{1}{z}\right), \qquad \text{où} \quad |\varepsilon| = 1.$$

Pour qu'une fonction de Schur $F(z)$, de rang infini, soit telle que $\gamma_m = 0$ pour $m > n$, il faut et il suffit que ce soit une fraction rationnelle $\frac{A_n(z)}{Q_n(z)}$, telle que $A_n(z)$ et $Q_n(z)$ soient deux polynomes de degré n au plus, premiers entre eux et vérifiant

$$\tilde{Q}_n(z)\, Q_n(z) - A_n(z)\, \tilde{A}_n(z) \equiv \omega_n z^n,$$

où

$$\tilde{Q}_n(z) \equiv z^n \overline{Q}_n \frac{1}{z} \qquad \text{et} \qquad \tilde{A}_n(z) \equiv z^n \overline{A}_n \frac{1}{z},$$

ω_n étant réel positif.

Dans la suite, nous désignerons par s le rang fini ou infini d'une fonction de Schur $F(z)$.

Pour $n \leq s$, il existe quatre polynomes $A_{n-1}(z)$, $\tilde{A}_{n-1}(z)$, $Q_{n-1}(z)$ et $\tilde{Q}_{n-1}(z)$ de degré au plus égal à $n-1$ tels que

$$F(z) = \frac{A_{n-1}(z) + z\, \tilde{Q}_{n-1}(z)\, F_n(z)}{Q_{n-1}(z) + z\, \tilde{A}_{n-1}(z)\, F_n(z)}, \tag{1}$$

$Q_{n-1}(z)$ a tous ses zéros extérieurs au cercle-unité, et ces polynomes vérifient les relations

$$A_n(z) \equiv A_{n-1}(z) + \gamma_n z \tilde{Q}_{n-1}(z), \tag{2}$$

$$Q_n(z) \equiv Q_{n-1}(z) + \gamma_n z \tilde{A}_{n-1}(z), \tag{3}$$

$$\tilde{Q}_n(z) \equiv \bar{\gamma}_n A_{n-1}(z) + z \tilde{A}_{n-1}(z), \tag{4}$$

$$\tilde{A}_n(z) \equiv \bar{\gamma}_n A_{n-1}(z) + z \tilde{Q}_{n-1}(z), \tag{5}$$

$$\tilde{Q}_n(z) \equiv z^n \bar{Q}_n \frac{1}{z}, \tag{6}$$

$$\tilde{A}_n(z) \equiv z^n \bar{A}_n \frac{1}{z}, \tag{7}$$

avec

$$Q_0(z) \equiv 1, \qquad \tilde{Q}_0(z) \equiv 1, \qquad \tilde{A}_0(z) \equiv \gamma_0, \qquad A_0(z) \equiv \gamma_0;$$

$$\tilde{Q}_n(z)\, Q_n(z) - A_n(z) \tilde{A}_n(z) \equiv \omega_n z^n, \tag{8}$$

$$A_{n+1}(z)\, Q_n(z) - A_n(z)\, Q_{n+1}(z) \equiv \gamma_{n+1} \omega_n z^{n+1}, \tag{9}$$

où

$$\omega_n = \prod_{i=0}^{n} (1 - |\gamma_i|^2) \tag{10}$$

donc, pour $n < s$, ω_n est réel positif, la suite est décroissante. Et en tout point de la circonférence-unité :

$$|A_n(z)| < |Q_n(z)|,$$

pour $n = s$:

$$A_s(z) \equiv \varepsilon \tilde{Q}_s(z) \qquad \text{où} \quad |\varepsilon| = 1, \qquad \text{alors} \quad \omega_s = 0.$$

On remarque, de plus, que si $\gamma_n = 0$, alors $F(z) = \frac{A_{n-1}(z)}{Q_{n-1}(z)}$ dans ce cas $F_{n-1}(z)$ est constante, de module inférieur à 1.

2. Fonctions méromorphes. — On peut exprimer, d'une manière analogue, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(z)$, méromorphe à l'intérieur du cercle-unité, holomorphe à l'origine et bornée par 1 en module sur la circonférence unité, ait un nombre donné p de pôles intérieurs au cercle-unité.

Mlle Chamfy [1] a montré qu'on peut obtenir ces inégalités en faisant subir à $f(z)$ un nombre fini de transformations des types suivants :

Posons $f(z) = \varphi_0 + \varphi_m z^m + \ldots$, où $\varphi_m \neq 0$, au voisinage de l'origine.

1° Si $|\varphi_0| > 1$. Transformation 1 :

$$f_1(z) = \frac{\bar{\varphi}_0 f(z) - 1}{\varphi_0 - f(z)} z^m.$$

2° Si $|\varphi_0| = 1$. Transformation 2 :

$$g_1(z) = \frac{(z^{2m} + \varphi_0\overline{\varphi}_m z^m - 1) f(z) - \varphi_0 (z^{2m} - 1)}{\overline{\varphi}_0 (z^{2m} - 1) f(z) - (z^{2m} - \varphi_0\varphi_m z^m - 1)}.$$

3° Si $|\varphi_0| < 1$. Transformation 3 :

$$h_1(z) = \frac{f(z) - \varphi_0}{1 - \overline{\varphi}_0 f(z)} \frac{1}{z}.$$

Au bout d'un nombre fini de ces opérations, on obtient une fonction de Schur $F(z)$. Si $F(z)$ est de rang fini, $f(z)$ est une fraction rationnelle de module 1 sur la circonférence-unité, nous dirons que $f(z)$ est de rang fini s, s est le degré commun du numérateur et du dénominateur de $f(z)$. Dans le cas contraire, nous dirons que $f(z)$ est de rang infini.

Les inégalités sur les coefficients de $F(z)$ *obtenues par la méthode précédente, jointes à celles qui conditionnent le mode de formation de* $F(z)$, *constituent la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction* $f(z)$, *holomorphe à l'origine, soit méromorphe dans le cercle-unité, bornée par* 1 *en module sur la circonférence-unité et ait* p *pôles distincts ou non à l'intérieur du cercle-unité.*

Si les coefficients φ_n sont réels, M^lle^ Chamfy a donné une méthode pour former pratiquement ces inégalités; nous allons montrer qu'il est encore possible de le faire si les φ_n sont complexes.

Théorème 1. — *Il existe, pour* $n_0 \leq n \leq s$, *un couple unique de polynomes premiers entre eux* $A_n(z)$ *et* $Q_n(z)$, *de degré au plus égal à* n, *tels que :*

1° $Q_n(0) = 1$ *et* $Q_n(z)$ *a* p *zéros intérieurs au cercle-unité.*

2° *En tout point de la circonférence-unité :*

$$|A_n(z)| < |Q_n(z)| \qquad si \quad n < s,$$
$$|A_s(z)| = |Q_s(z)|$$

3° *Au voisinage de l'origine :*

$$\frac{A_n(z)}{Q_n(z)} = \varphi_0 + \ldots + \varphi_n z^n + s_{n+1} z^{n+1} + \ldots.$$

4° *Si on pose*

$$\tilde{A}_n(z) = z^m \overline{A}_n\left(\frac{1}{z}\right), \qquad \tilde{Q}_n(z) = z^n \overline{Q}_n\left(\frac{1}{z}\right),$$

on a les relations (2) *à* (9), *et de plus :*

$$|\varphi_{n+1} - s_{n+1}| \leq \omega_n, \tag{11}$$

$$\omega_{n+1} = \omega_n (1 - |\gamma_{n+1}|^2), \tag{12}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\varphi_{n+1} - s_{n+1}}{\omega_n}. \tag{13}$$

5° *Les* ω_n *sont réels positifs et forment une suite décroissante.*

6° *La série de terme général* $|c_{n+1} - s_{n+1}|^2$ *converge.*

1° *Unicité de ces polynomes.* — Supposons qu'il existe deux couples de polynomes $A_n(z)$, $Q_n(z)$ et $A'_n(z)$, $Q'_n(z)$, de degré au plus égal à n, vérifiant

$$\tilde{Q}_n(z)\,Q_n(z) - A_n(z)\,\tilde{A}_n(z) \equiv \omega_n z^n,$$

$$\tilde{Q}'_n(z)\,Q'_n(z) - A'_n(z)\,\tilde{A}'_n(z) \equiv \omega'_n z^n,$$

$$\frac{A_n(z)}{Q_n(z)} = c_0 + \ldots + c_n z^n + s_{n+1} z^{n+1} + \ldots,$$

$$\frac{A'_n(z)}{Q'_n(z)} = c_0 + \ldots + c_n z^n + s'_{n+1} z^{n+1} + \ldots.$$

Considérons, pour tout ε de module 1, les fonctions

$$\frac{d_{n+1}(z)}{e_{n+1}(z)} = \frac{A_n(z) + \varepsilon z \tilde{Q}_n(z)}{Q_n(z) + \varepsilon z \tilde{A}_n(z)},$$

$$\frac{d'_{n+1}(z)}{e'_{n+1}(z)} = \frac{A'_n(z) + \varepsilon z \tilde{Q}'_n(z)}{Q'_n(z) + \varepsilon z \tilde{A}'_n(z)}.$$

Ce sont des fonctions de rang $n+1$, qui ont p pôles intérieurs au cercle-unité, de plus :

$$\frac{d_{n+1}(z)}{e_{n+1}(z)} = c_0 + \ldots + c_n z^n + (s_{n+1} + \varepsilon\omega_n) z^{n+1} + \ldots,$$

$$\frac{d'_{n+1}}{e'_{n+1}} = c_0 + \ldots + c_m z^n + (s'_{n+1} + \varepsilon\omega'_n) z^{n+1} + \ldots,$$

d'où

$$d_{n+1}(z)\,e'_{n+1}(z) - d'_{n+1}(z)\,e_{n+1}(z) = z^{n+1}[\varepsilon(\omega_n - \omega'_n) + (s_{n+1} - s'_{n+1})],$$

d'où l'on déduit que

$$\omega_n = \omega'_n \qquad \text{et} \qquad s_{n+1} = s'_{n+1}.$$

En effet, soit α un nombre de module 1, on a

$$\begin{aligned} &d_{n+1}(\alpha)\,e'_{n+1}(\alpha) - d'_{n+1}(\alpha)\,e_{n+1}(\alpha) \\ &\quad = \alpha^{n+1}[d_{n+1}(\alpha)\,\overline{d}'_{n+1}(\overline{\alpha}) - d'_{n+1}(\alpha)\,\overline{d}_{n+1}(\overline{\alpha})] = \alpha^{n+1} H(\alpha) \end{aligned}$$

et $H(\alpha)$ est imaginaire pur, or

$$H(\alpha) = \varepsilon(\omega_n - \omega'_n) + (s_{n+1} - s'_{n+1}) + \ldots,$$

cette quantité ne peut être imaginaire pure quel que soit ε de module 1, que si elle est nulle.

$$\omega_n = \omega'_n \qquad \text{et} \qquad s_{n+1} = s'_{n+1},$$

les polynomes $A_n(z)$ et $Q_n(z)$ sont donc uniques.

2° *Existence de ces polynomes.* — Nous avons vu que Schur a défini ces polynomes pour les fonctions holomorphes. Au moyen d'un nombre fini de transformations des trois types indiqués, on peut faire correspondre à la fonction $f(z)$, une fonction de Schur $F(z)$.

Des calculs analogues à ceux de M^lle^ Chamfy [1], dans le cas où les φ_n sont réels, permettent, à partir des polynomes associés à $F(z)$, de construire un couple de polynomes premiers entre eux $A_n(z)$ et $Q_n(z)$, associé à $f(z)$ pour $n_0 \leq n \leq s$, ayant les propriétés suivantes :

1. $A_n(z)$ *et* $Q_n(z)$ *sont, au plus, de degré* n, $Q_n(0) = 1$ *et* $Q_n(z)$ *a* p *zéros intérieurs au cercle-unité.*

2. *En tout point de la circonférence-unité :*

$$|A_n(z)| \leq |Q_n(z)|. \tag{14}$$

3. *On a l'identité* (8) :

$$\tilde{Q}_n(z)\,Q_n(z) - A_n(z)\,\tilde{A}_n(z) = \omega_n z^n,$$

où

$$\tilde{Q}_n(z) = z^n \overline{Q}_n\left(\frac{1}{z}\right), \qquad \tilde{A}_n(z) = z^n \overline{A}_n\left(\frac{1}{z}\right).$$

3° *Formation des inégalités.* — L'inégalité (14) jointe à l'identité (8) montrent qu'en tout point de la circonférence-unité :

$$|A_n(z)| \leq |Q_n(z)| \qquad \text{pour} \quad n_0 \leq n \leq s$$

et

$$|A_s(z)| = |Q_s(z)|$$

de plus ω_n est réel positif pour $n_0 \leq n < s$ et $\omega_s = 0$.

Considérons maintenant la fonction

$$g(z) = \frac{A_n(z) - Q_n(z)\,f(z)}{Q_n(z) - A_n(z)\,f(z)} \cdot \frac{1}{z},$$

$g(z)$ est une fonction de Schur, et

$$g(0) = \frac{a_{n+1} - \varphi_{n+1}}{\omega_n}.$$

D'où l'inégalité (11), l'égalité ne pouvant avoir lieu que pour $n = s - 1$. D'autre part, les relations de récurrence (2) et (5) permettent d'écrire

$$A_{n+1}(z)\,Q_n(z) - A_n(z)\,Q_{n+1}(z) = \gamma_{n+1}\omega_n z^{n+1}.$$

D'où l'on déduit (13); on a donc encore

$$|\gamma_n| < 1 \qquad \text{pour} \quad n_0 \leq n < s \qquad \text{et} \qquad |\gamma_s| = 1.$$

Les relations de récurrence permettent encore d'écrire (12), ce qui prouve que la suite des ω_n est décroissante.

De (12) on déduit

$$\omega_n(\omega_{n+1}-\omega_n)=|\varphi_{n+1}-s_{n+1}|^2$$

La série de terme général $\omega_{n+1}-\omega_n$ converge et les ω_n forment une suite décroissante, donc si s est infini la série de terme général $|\varphi_{n+1}-s_{n+1}|^2$ converge.

4° *Cas particulier* $p=1$. — En appliquant la méthode indiquée, pour la formation des polynomes $A_n(z)$ et $Q_n(z)$, on obtient :

a. $|\varphi_0|>1$:

$$A_1(z)\equiv\varphi_0+\frac{\varphi_1}{1-|\varphi_0|^2}z,$$

$$Q_1(z)\equiv 1+\frac{\varphi_1\bar{\varphi}_0}{1-|\varphi_0|^2}z;$$

b. $|\varphi_0|=1$:

$$A_2(z)\equiv\varphi_0+\left(\varphi_1-\frac{\varphi_0\varphi_2}{\bar{\varphi}_1}\right)z-\frac{\bar{\varphi}_0\varphi_1}{\bar{\varphi}_1}z^2,$$

$$Q_2(z)\equiv 1-\frac{\varphi_2}{\bar{\varphi}_1}z-\frac{\varphi_1\varphi_0}{\varphi_0\bar{\varphi}_1}z^2.$$

3. Fractions rationnelles. — Parmi les fonctions méromorphes que nous venons d'étudier, se trouvent les fractions rationnelles bornées par 1 en module sur la circonférence-unité et ayant p pôles différents de zéro, distincts ou non, à l'intérieur du cercle-unité. Étant donnée une fraction rationnelle de rang infini $\frac{A(z)}{Q(z)}$, nous nous proposons de trouver toutes les fractions rationnelles, bornées par 1 en module sur la circonférence-unité et, ayant même développement en série de Taylor au voisinage de l'origine que $\frac{A(z)}{Q(z)}$ jusqu'à un certain rang N.

Soient a et s les degrés respectifs de $A(z)$ et $Q(z)$, posons

$$\tilde{Q}(z)\equiv z^s\bar{Q}\left(\frac{1}{z}\right),\qquad \tilde{A}(z)\equiv z^a\bar{A}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Théorème 2. — *Soit* $f_N(z)$ *une fraction rationnelle, bornée par* 1 *en module sur la circonférence-unité, admettant au voisinage de l'origine le développement en série de Taylor :*

$$f_N(z)\equiv\varphi_0+\ldots+\varphi_{N-1}z^{N-1}+\varphi'_Nz^N+\ldots,\qquad \text{où}\quad \varphi_N\neq\varphi'_N.$$

Alors, il existe un entier n *et deux polynomes* $U(z)$ *et* $V(z)$ *tels que*

$$f_N(z)=\frac{A(z)U(z)+z^{n-a}\tilde{Q}(z)V(z)}{Q(z)U(z)+z^{n+s}\tilde{A}(z)V(z)}.$$

et, en tout point de la circonférence-unité :

$$|U(z)| \leq |V(z)|,$$

cette inégalité devenant une identité si $f_N(z)$ est de rang fini.

De plus le nombre de pôles intérieurs au cercle-unité de $\frac{U(z)}{V(z)}$ est borné par une constante qui ne dépend que du nombre de pôles de $\frac{A(z)}{Q(z)}$ et $f_N z$).

Démonstration. — Soit $f_N(z) = \frac{C_N(z)}{D_N(z)}$ la fraction rationnelle cherchée. Il est commode d'introduire le polynome $\Omega(z)$ ainsi défini :

$$\Omega(z) \equiv z^{a-s}\tilde{Q}(z)\,Q(z) - A(z)\,\tilde{A}(z) \qquad \text{si} \quad a > s,$$
$$\Omega(z) \equiv \tilde{Q}(z)\,Q(z) - z^{s-a}A(z)\,\tilde{A}(z) \qquad \text{si} \quad a < s,$$
$$\Omega(z) \equiv z^{-r}\left[\tilde{Q}(z)\,Q(z) - A(z)\,\tilde{A}(z)\right] \qquad \text{si} \quad a = s,$$

r étant tel que $\Omega(0) \neq 0$. On peut alors, quitte à multiplier $C_N(z)$ et $D_N(z)$ par un même polynome, écrire :

$$C_N(z)\,Q(z) - D_N(z)\,A(z) \equiv z^N \Omega(z)\,V(z), \tag{16}$$

où $V(z)$ est un polynome (pouvant éventuellement dépendre de N). En remplaçant $\Omega(z)$ par son expression dans (16), on obtient :

a. Si $a > s$:

$$Q(z)\left[C_N(z) - z^{N+a-s}\tilde{Q}(z)\,V(z)\right] - A(z)\left[D_N(z) - z^N\tilde{A}(z)\,V(z)\right] \equiv 0;$$

b. Si $a < s$:

$$Q(z)\left[C_N(z) - z^N\tilde{Q}(z)\,V(z)\right] - A(z)\left[D_N(z) - z^{N+s-a}\tilde{A}(z)\,V(z)\right] \equiv 0;$$

c. Si $a = s$:

$$Q(z)\left[z^r C_N(z) - z^N\tilde{Q}(z)\,V(z)\right] - A(z)\left[z^r D_N(z) + z^N\tilde{A}(z)\,V(z)\right] \equiv 0$$

et, puisque $A(z)$ et $Q(z)$ sont premiers entre eux, il existe, dans les trois cas considérés, un polynome $U(z)$ tel que

$$f_N(z) = \frac{A(z)\,U(z) + z^{n+a}\tilde{Q}(z)\,V(z)}{Q(z)\,U(z) + z^{n+s}\tilde{A}(z)\,V(z)},$$

où

$$n = N - a \qquad \text{si} \quad a > s,$$
$$n = N - s \qquad \text{si} \quad a < s,$$
$$n = N - r \qquad \text{si} \quad a = s.$$

(dans ce cas le calcul n'est valable que pour $N \geq r$, mais si $N \leq r$, un calcul analogue conduit à une expression semblable).

Puisque $\frac{A(z)}{Q(z)}$ est de rang infini, on a l'inégalité

$$|A(z)|<|Q(z)|$$

en tout point de la circonférence-unité, sauf, au plus en un nombre fini de points où $|A(z)|=|Q(z)|$. Or sur $|z|=1$, on a

$$\tilde{Q}(z)\equiv z^{s}\overline{Q(z)} \qquad \text{et} \qquad \tilde{A}(z)\equiv z^{a}\overline{A(z)}$$

donc, sur $|z|=1$:

$$f_N(z)=\frac{\overline{A(z)}}{\overline{Q(z)}}\cdot\frac{z^{n+s+a}\frac{V(z)}{U(z)}+\frac{A(z)}{\overline{Q(z)}}}{1+z^{n+s+a}\frac{V(z)}{U(z)}\frac{\overline{A(z)}}{\overline{Q(z)}}}.$$

On reconnaît dans l'expression entre crochets une transformation homographique conservant $\left|\frac{V(z)}{U(z)}\right|\leq 1$, pour $|z|=1$.

Si $f_N(z)$ est bornée par 1, en module, sur la circonférence-unité, il en est de même de $\frac{V(z)}{U(z)}$ et $\frac{V(z)}{U(z)}$ est de rang fini ou infini suivant que $f_N(z)$ est de rang fini ou infini.

De (16), on déduit que le P. G. C. D. de $C_N(z)$ et $D_N(z)$ est un diviseur de $\Omega(z)$, ce polynome a donc au plus $h=\mathrm{Max}(a, s)$ zéros intérieurs au cercle-unité. Soit p le nombre de pôles intérieurs au cercle-unité de $\frac{A(z)}{Q(z)}$ et k le nombre de pôles intérieurs au cercle-unité de $f_N(z)$, soit u le nombre de zéros intérieurs au cercle-unité de $U(z)$.

Considérons le polynome

$$Q(z)U(z)+tz^{n}\tilde{A}(z)V(z), \qquad \text{où} \quad |t|<1,$$

d'après le théorème de Rouché, il a $(p+u)$ zéros intérieurs au cercle-unité et, en faisant tendre t vers 1, on obtient que

$$D_N(z)\equiv Q(z)U(z)+z^{n}\tilde{A}(z)V(z)$$

a au plus $(p+u)$ zéros intérieurs au cercle-unité. Soit $h'\leq h$, le nombre de zéros intérieurs au cercle-unité de $\Omega(z)$, on a donc

$$k\geq p+u-h',$$

d'où (17) :

$$u\leq k+h-p.$$

Cas particulier des développements à coefficients entiers. — Alors, on peut choisir $U(z)$ et $V(z)$ à coefficients entiers, (les coefficients de ces deux polynomes étant premiers entre eux dans leur ensemble). Nous allons d'abord montrer que $U(0)$ *divise* $\Omega(0)$.

Soit

$$f_N(z) = \frac{C_N(z)}{D_N(z)} = \frac{A(z)\,U(z) + z^{n+a}\tilde{Q}(z)\,V(z)}{Q(z)\,V(z) + z^{n+s}\tilde{A}(z)\,V(z)},$$

$C_N(z)$ et $D_N(z)$ étant premiers entre eux, donc $D_N(0) = 1$.

On a alors

$$A(z)\,U(z) + z^{n+a}\tilde{Q}(z)\,V(z) \equiv \alpha\chi(z)\,C_N(z),$$
$$Q(z)\,U(z) + z^{n+s}\tilde{A}(z)\,V(z) \equiv \alpha\chi(z)\,D_N(z),$$

où α est une constante (pouvant être égale à 1) et où $\chi(z)$ est un polynome divisant $\Omega(z)$.

Posons de plus :

$$\Omega(z) = \omega\Omega^*(z),$$

ω étant une constante (pouvant être égale à 1) et $\Omega^*(z)$ étant primitif. Alors

$$f_N(z) - \frac{A(z)}{Q(z)} = z_N \frac{\omega\Omega^*(z)\,V(z)}{\alpha\chi(z)\,Q(z)\,D_N(z)} \tag{17}$$

et $\chi(z)$ étant un diviseur primitif de $\Omega(z)$, divise $\Omega^*(z)$, donc $\chi(0)$ divise $\Omega^*(0)$. De plus, cette expression admettant un développement à coefficients entiers, si $|\alpha| \neq 1$, α divise tous les coefficients de $\Omega^*(z)$ $V(z)$ ω. Si un diviseur premier p de α ne divise pas ω, il doit diviser tous les coefficients de $\Omega^*(z)$ $V(z)$; comme $\Omega^*(z)$ est primitif, α divise tous les coefficients de $V(z)$, donc aussi ceux de $U(z)$, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur les coefficients de ces polynomes. Donc α divise ω. Et $U(0) = \alpha\chi(0)$ divise $\omega\chi^*(0) = \Omega(0)$.

Il résulte de ce qui précède que, si la fraction rationnelle $\frac{A(z)}{Q(z)}$ est donnée, $U(0)$ ne peut prendre qu'un nombre fini des valeurs. En particulier, si l'on considère une suite de fractions rationnelles $\frac{A_\mu(z)}{Q_\mu(z)}$ tendant vers $\frac{A(z)}{Q(z)}$, on peut en extraire une sous-suite telle que les fractions $\frac{U_\mu(z)}{V_\mu(z)}$ associées soient telles que $U_\mu(0)$ ne dépendent pas de u. Ces fractions rationnelles ont alors les propriétés suivantes :

1. $V_\mu(z)$ *et* $U_\mu(z)$ *sont à coefficients entiers et* $U_\mu(0) = q$ *est indépendant de* μ *donc, au voisinage de l'origine :*

$$\frac{V_\mu(z)}{U_\mu(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_n^{(\mu)}}{q^{n+1}} z^n, \qquad \textit{où } w_n^{(\mu)} \textit{ est entier.}$$

2. *Pour* $|z| = 1$:

$$|V_\mu(z)| \leq |U_\mu(z)|.$$

3. *Le nombre de pôles intérieurs au cercle-unité de* $\frac{V_\mu(z)}{U_\mu(z)}$ *est borné indépendamment de* μ.

M. Pisot a montré que de telles fonctions rationnelles forment une famille normale [12].

CHAPITRE II.

Caractérisation des ensembles S″(K).

Dans ce chapitre, nous rappellerons les résultats obtenus pour les ensembles dérivés des ensembles S(K), et nous en déduirons une caractérisation des ensembles dérivés seconds S″(K). Ces caractérisations jointes aux inégalités du chapitre I nous permettront d'écrire des inégalités entre les coefficients du développement en série de Taylor des fractions rationnelles associées.

Aux ensembles S(K), on associe les familles C(K) de fractions rationnelles ainsi définies :

une fraction rationnelle $\frac{A(z)}{Q(z)} \in C(K)$ si elle possède les propriétés suivantes :

(1) $\frac{A(z)}{Q(z)}$ *a un pôle intérieur au cercle-unité* $\frac{1}{\theta}$.

(2) $\frac{A(z)}{Q(z)}$ *admet, au voisinage de l'origine, le développement en série de Taylor :*

$$\frac{A(z)}{Q(z)} = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

où les c_n *sont des entiers de* K.

(3) *En tout point de la circonférence-unité :*

$$|A(z)| \leq |Q(z)|.$$

1. Rappel des résultats obtenus pour les ensembles dérivés. — Si $\theta \in S(K)$ n'est pas une unité quadratique sur K, on peut lui associer, au moins, une fraction rationnelle de C(K). En effet, si P(z) est le polynome irréductible de zéro θ, si s est son degré, posons

$$Q(z) \equiv z^s \overline{P}\left(\frac{1}{z}\right),$$

alors $\frac{P(z)}{Q(z)} \in C(K)$. Si θ est une unité quadratique sur K, on voit facilement que pour $|z| = 1$, on a l'inégalité

$$1 \leq |P(z)|,$$

donc la fraction rationnelle $\frac{1}{Q(z)} \in C(K)$.

Dans la suite, nous appellerons $Q(z)$ le polynome irréductible de zéro $\frac{1}{\theta}$

Ces fractions rationnelles forment une famille normale à l'intérieur du cercle-unité [14]. Plus précisément, si l'on considère une suite de fractions rationnelles $\frac{A_\mu(z)}{Q_\mu(z)} \in C(K)$ telle que les θ_μ correspondants soient bornés, en module, on peut en extraire une suite partielle tendant vers une fraction rationnelle $\frac{A(z)}{Q(z)} \in C(K)$. On en déduit que les ensembles $S(K)$ sont fermés.

Les fractions limites de la famille peuvent être caractérisées par une propriété analogue à celle qui a permis à M. Dufresnoy et Pisot de caractériser les nombres $\theta \in S'$, ensemble dérivé de S ([4], [5]).

Théorème 1. — *Pour qu'une fraction rationnelle* $\frac{A(z)}{Q(z)} \in C(K)$ *puisse être considérée comme limite d'une suite de fonctions de la famille, il faut et il suffit que l'égalité*

$$|A(z)| = |Q(z)|$$

soit vérifiée, au plus, en un nombre fini de points de la circonférence-unité.

Nous noterons par $C'(K)$ l'ensemble de ces fractions rationnelles.

Corollaire. — *Pour qu'un nombre* $\theta \in S(K)$ *appartienne à* $S'(K)$, *il faut et il suffit qu'il existe un polynome* $A(z)$ *à coefficients entiers de* K, *tel qu'en tout point de la circonférence-unité :*

$$|A(z)| \leq |Q(z)|.$$

L'égalité ayant lieu, au plus, en un nombre fini de points.

Démonstration. — Soit

$$\frac{A(z)}{Q(z)} = \lim_{\mu \to \infty} \frac{A_\mu(z)}{Q_\mu(z)}$$

et

$$\frac{A(z)}{Q(z)} - \frac{A_\mu(z)}{Q_\mu(z)} = z^k\left(c_k - c_k^{(\mu)}\right) + \dots$$

D'où

$$A(z)\,Q_\mu(z) - A_\mu(z)\,Q(z) = z^k H(z)$$

Le théorème de Rouché permet de montrer qu'on ne peut pas avoir

$$|A(z)| = |Q(z)|$$

en tout point de la circonférence-unité, car le premier membre aurait un nombre constant de zéros intérieurs au cercle-unité.

La réciproque se montre de la même manière que pour les nombres $0 \in S$. Soient $\frac{A(z)}{Q(z)} \in C^1(K)$, soient a et s les degrés respectifs de $A(z)$ et $Q(z)$, posons

$$\tilde{A}(z) = z^a A\left(\frac{1}{z}\right), \qquad \tilde{Q}(z) = z^s Q\left(\frac{1}{z}\right)$$

et formons les polynomes

$$\tilde{Q}_\mu(z) = A(z) + \varepsilon z^{\mu+a}\tilde{Q}(z),$$
$$Q_\mu(z) = Q(z) + \varepsilon z^{\mu+s}\tilde{A}(z),$$

ε étant une unité de K, et $\mu \geq 1$.

D'après le théorème de Rouché $Q_\mu(z)$ a, au plus, un zéro intérieur au cercle-unité, et puisque $Q_\mu(0) = 1$ et $Q_\mu(0) = A(0) = c_0$, $\frac{\tilde{Q}_\mu(z)}{Q_\mu(z)}$ ne peut pas être holomorphe pour $|z| \leq 1$, donc $\frac{\tilde{Q}_\mu(z)}{Q_\mu(z)} \in C(K)$, et l'on peut lui associer une suite de nombres $\theta_\mu \in S(K)$. Il en résulte que *le polynome* $Q_\mu(z)$ *a un seul zéro* $\frac{1}{\theta_\mu}$ *intérieur au cercle-unité où* $\theta_\mu \in S(K)$, *ses autres zéros sont, soit extérieurs au cercle-unité, soit des racines de l'unité.*

Posons, au voisinage de l'origine :

$$\frac{\tilde{Q}_\mu(z)}{Q_\mu(z)} = c_0^{(\mu)} + \ldots + c_n^{(\mu)} z^n + \ldots,$$

on aura

$$c_n^{(\mu)} = c_n \qquad \text{pour} \quad n < M$$

et

$$c_M^{(\mu)} \neq c_M,$$

où

$$M = \mu \qquad \text{si} \quad a < s,$$
$$M = \mu + a - s \qquad \text{si} \quad a > s,$$
$$M = \mu + r \qquad \text{si} \quad a = s$$

et r étant le degré le plus bas du polynome :

$$\tilde{Q}(z)\,Q(z) - A(z)\,\tilde{A}(z),$$

on en déduit que

$$|c_{M+1} - s_{M+1}| \leq \omega_M - 1$$

et, si $p = 1$, on a l'inégalité

$$|c_{n+1} - s_{n+1}| \leq \omega_n - 1 \qquad \text{pour tout} \quad n \geq \text{Max}(r+1, 2)$$

THÉORÈME 2. — *Si* $\frac{A(z)}{Q(z)} \in C^1(K)$, *et si elle admet au voisinage de l'origine le développement*

$$c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots,$$

les quantités s_n *et* ω_n *qui lui correspondent vérifient les inégalités*

$$|c_{n+1} - s_{n+1}| \leq \omega_n - 1 \qquad \text{pour} \quad n \geq \text{Max}(r+1, 2).$$

2. CARACTÉRISATION DES ENSEMBLES $S''(K)$.

THÉORÈME 3. — *Pour qu'un nombre* θ *appartienne à* $S''(K)$, *il faut et il suffit qu'il existe trois polynomes à coefficients entiers de* K : $A(z)$, $B(z)$ *et* $C(z)$ *avec* $A(0) \neq 0$, $B(z)$ *ou* $C(z)$ *pouvant éventuellement être identiquement nul, avec* $|C(z)| \leq |Q(z)|$ *et* $|B(z)| \leq |Q(z)|$ *pour* $|z| = 1$, *les égalités ayant lieu au plus en un nombre fini de points, tels que, pour tout entier positif* μ, *on ait, en tout point de la circonférence-unité :*

$$|A(z) + z^\mu B(z)| \leq |Q(z) + z^\mu C(z)|,$$

l'égalité étant vérifiée, au plus, en un nombre fini de points.

Démonstration. — Un nombre $\theta \in S''(K)$ est limite d'une suite de nombres $\theta_\mu \in S'(K)$; à chaque nombre θ_μ, on peut associer une fraction rationnelle $\frac{A_\mu(z)}{Q_\mu(z)} \in C^1(K)$; de la suite de ces fractions, on peut extraire une sous-suite convergeant, à l'intérieur du cercle-unité, vers une fraction rationnelle $\frac{A(z)}{Q(z)}$ associée au nombre θ. Nous appellerons $C^2(K)$ l'ensemble de ces fractions rationnelles, associées à l'ensemble $S''(K)$.

Nous allons construire une nouvelle suite de fractions rationnelles appartenant à $C^1(K)$ et convergeant vers $\frac{A(z)}{Q(z)}$ à l'intérieur du cercle-unité :

$$\frac{A_\nu^*(z)}{Q_\nu^*(z)} = \frac{A(z) + \varepsilon z^\nu B(z)}{Q(z) + \varepsilon z^\nu C(z)}$$

où ε est une unité de K; $B(z)$ et $C(z)$ étant des polynomes à coefficients entiers de K.

Soient a_μ et s_μ les degrés respectifs de $A_\mu(z)$ et $Q_\mu(z)$. Posons

$$\tilde{A}_\mu(z) = z^{a_\mu} A_\mu\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\tilde{Q}_\mu(z) = z^{s_\mu} Q_\mu\left(\frac{1}{z}\right).$$

On peut extraire de la suite des indices μ, une suite partielle encore notée μ, telle qu'à l'intérieur du cercle-unité :

$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{A_\mu(z)}{Q_\mu(z)}=\frac{A(z)}{Q(z)},$$
$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{\tilde{Q}_\mu(z)}{Q_\mu(z)}=\frac{B^*(z)}{Q(z)},$$
$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{\tilde{A}_\mu(z)}{Q_\mu(z)}=\frac{C^*(z)}{Q(z)}.$$

Formons alors les polynomes

$$\tilde{Q}_{\mu\nu}(z)=A_\mu(z)+\varepsilon z^{\nu+a_\mu}\tilde{Q}_\mu(z),$$
$$Q_{\mu\nu}(z)=Q_\mu(z)+\varepsilon z^{\nu+s_\mu}\tilde{A}_\mu(z).$$

La suite des fractions rationnelles $\frac{\tilde{Q}_{\mu\nu}(z)}{Q_{\mu\nu}(z)}$ peut être associée à une suite de nombres $\theta_{\mu\nu}\in S(K)$, et

$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{P_{\mu\nu}(z)}{Q_{\mu\nu}(z)}=\frac{A_\nu^*(z)}{Q_\nu^*(z)}\in C^1(K).$$

Distinguons les différents cas suivants :

1. $a_\mu-s_\mu$ *est borné :* Alors, pour une infinité de valeurs de μ on a $a_\mu-s_\mu=d$. Posons $\nu'=\nu+s_\mu$, il vient

$$\frac{A_\nu^*(z)}{Q_\nu^*(z)}=\frac{A(z)+\varepsilon z^{\nu'+d}B^*(z)}{Q(z)+\varepsilon z^{\nu'}C^*(z)}$$

qui est bien de la forme indiquée.

2. $a_\mu-s_\mu$ *n'est pas borné supérieurement :* Alors, de la suite, on peut extraire une suite partielle telle que $a_\mu-s_\mu\to-\infty$ et, en posant $\nu'=\nu+s_\mu$, il vient

$$\frac{A_\nu^*(z)}{Q_\nu^*(z)}=\frac{A(z)}{Q(z)+\varepsilon z^{\nu'}C^*(z)}.$$

3. $a_\mu-s_\mu$ *n'est pas borné inférieurement :* Alors, de la suite, on peut extraire une suite partielle telle que $a_\mu-s_\mu\to-\infty$. Et, en posant $\nu'=\nu+a_\mu$, il vient

$$\frac{A_\nu^*(z)}{Q_\nu^*(z)}=\frac{A(z)+\varepsilon z^{\nu'}B^*(z)}{Q(z)}$$

Dans les trois cas considérés, $\frac{A_\nu^*(z)}{Q_\nu^*(z)}$ est bien de la forme indiquée, d'où l'existence des polynomes $A(z)$, $B(z)$ et $C(z)$. Dans les cas 2 et 3 l'un des polynomes $B(z)$ ou $C(z)$ est identiquement nul.

D'autre part, il résulte de la manière dont ils ont été obtenus que ces polynomes vérifient les inégalités suivantes pour $|z|=1$:

$$|A(z)| \leq |Q(z)|; \qquad |B(z)| \leq |Q(z)|; \qquad |C(z)| \leq |Q(z)|,$$

les inégalités ayant lieu, au plus, en un nombre fini de points.

Réciproque. — Supposons qu'il existe trois polynomes $A(z)$, $B(z)$ et $C(z)$ vérifiant les conditions du théorème, alors, pour tout entier $\mu > 0$, le polynome

$$Q(z) + z^{\nu} C(z) + z^{\mu}[A(z) + z^{\nu} B(z)]$$

admet un zéro $\frac{1}{\theta_{\nu\mu}}$ intérieur au cercle-unité et $\theta_{\nu\mu} \in S(K)$, en faisant tendre successivement ν et μ vers l'infini, on en déduit que le nombre θ associé à $Q(z)$ appartient à $S''(K)$.

D'autre part, on remarque que le nombre θ_{μ} associé au polynome

$$Q(z) + z^{\mu} A(z)$$

appartient à $S'(K)$.

Remarques sur les cas 2 *et* 3 :

1. *Il existe deux polynomes à coefficients entiers de* K, $A(z)$ *et* $A^*(z)$ *tels qu'en tout point de la circonférence-unité :*

$$|A(z)| + |A^*(z)| \leq |Q(z)|.$$

Et l'existence de tels polynomes entraîne que $\theta \in S''(K)$.

En effet, on voit facilement qu'alors, il existe deux polynomes à coefficients entiers de K, $A(z)$ et $A^*(z)$, tels que pour tout entier positif μ la fraction rationnelle

$$\frac{A(z) + z^{\mu} A^*(z)}{Q(z)}$$

appartienne à $C'(K)$, c'est-à-dire que pour $|z|=1$, on ait l'inégalité

$$|A(z) + z^{\mu} A^*(z)| \leq |Q(z)|.$$

Alors, si $z = e^{2i\pi\alpha}$, où α est irrationnel, z^{μ} est partout dense sur la circonférence-unité, et l'on peut choisir μ tel que $\arg(z^{\mu})$ soit aussi voisin qu'on veut de $2\pi + \arg A(z) - \arg A^*(z)$, alors $|A(z) + z^{\mu} A^*(z)|$ est aussi voisin qu'on veut de $|A(z)| + |A^*(z)|$; et, en tout point de la circonférence-unité :

$$|A(z)| + |A^*(z)| \leq |Q(z)|.$$

Réciproquement, on voit que l'existence de tels polynomes entraîne que le nombre θ correspondant appartient à $S''(K)$.

2. *De ce qui précède, il résulte qu'une condition nécessaire et suffisante pour que* $Q(z)$ *soit de ce type est qu'il existe une infinité de polynomes* $A_\mu(z)$ *tels que, pour* $|z| = 1$, *on ait*

$$|A_\mu(z)| \leq |Q(z)|.$$

Inégalités entre les coefficients. — Nous avons vu que, si $\frac{A(z)}{Q(z)} \in C^2(K)$, on peut la considérer comme limite d'une suite $\frac{A_\mu(z)}{Q_\mu(z)} \in C^1(K)$, où

$$\frac{A_\mu(z)}{Q_\mu(z)} = \frac{A(z) + \varepsilon z^\mu B(z)}{Q(z) + \varepsilon z^\mu C(z)} \quad \text{pour tout } \mu > 0, \qquad \text{où} \quad |\varepsilon| = 1.$$

Les fractions $\frac{A_\mu(z)}{Q_\mu(z)}$, ont un pôle intérieur au cercle-unité, sont de rang infini, et

$$\frac{A_\mu(z)}{Q_\mu(z)} = \frac{A(z)}{Q(z)} = \varepsilon z^\mu \frac{A(z)C(z) - B(z)Q(z)}{Q(z)Q_\mu(z)}.$$

Soit

$$\Phi_1(z) = r^{-r_1}[A(z)C(z) - B(z)Q(z)],$$

r_1 étant un entier positif ou nul tel que $\Phi_1(0) \neq 0$.

Posons

$$\frac{A_\mu(z)}{Q_\mu(z)} = \varphi_0^{(\mu)} + \ldots + \varphi_n^{(\mu)} z^n + \ldots,$$
$$\frac{A(z)}{Q(z)} = \varphi_0 + \ldots + \varphi_n z^n + \ldots$$

au voisinage de l'origine, on a alors

$$\varphi_n^{(\mu)} = \varphi_n \qquad \text{pour} \quad n \in \mu - r_1$$

et

$$|\varphi_{\mu - r_1}^{(\mu)} - \varphi_{\mu - r_1}| \geq 1.$$

Si l'on pose

$$\Omega_\mu(z) \equiv \tilde{Q}_\mu(z) Q_\mu(z) - z^{s_\mu - a_\mu} A_\mu(z) \tilde{A}_\mu(z) \qquad \text{si} \quad s_\mu > a_\mu,$$
$$\Omega_\mu(z) \equiv z^{a_\mu - s_\mu} \tilde{Q}_\mu(z) Q_\mu(z) - A_\mu(z) \tilde{A}_\mu(z) \qquad \text{si} \quad a_\mu > s_\mu,$$
$$\Omega_\mu(z) \equiv z^{-r_2}[Q_\mu(z) Q_\mu(z) - A_\mu(z) \tilde{A}_\mu(z)] \qquad \text{si} \quad a_\mu = s_\mu,$$

avec $\Omega_\mu(0) \neq 0$; on a alors $r_\mu \leq r_2$, r_2 étant le degré le plus bas du polynome

$$\Phi_2(z) \equiv A(z)C(z) - Q(z)B(z).$$

On peut, à partir de la suite $\frac{A_\mu(z)}{Q_\mu(z)}$, obtenir une nouvelle suite pour laquelle les rôles des polynomes $\Phi_1(z)$ et $\Phi_2(z)$ sont inversés. Comme les coefficients de $\frac{A_\mu(z)}{Q_\mu(z)}$ vérifient l'inégalité (1) pour

$$n \geq \text{Max}(2, r_2 + 1),$$

les coefficients de $\frac{A(z)}{Q(z)}$ *vérifient l'inégalité*

$$|c_{n+1} - s_{n+1}| \leq \omega_n - 2 \tag{2}$$

pour

$$n \geq \text{Max}(2, r_1 + 1, r_2 + 1).$$

Théorème 4. — *Si* $\frac{A(z)}{Q(z)} \in C^2(K)$ *admet, au voisinage de l'origine, le développement*

$$c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots,$$

les quantités s_n *et* ω_n *qui lui correspondent vérifient les inégalités*

$$|c_{n+1} - s_{n+1}| \leq \omega_n - 2$$

pour

$$n \geq \text{Max}(r_1 + 1, r_2 + 1, 2).$$

Corollaire. — *Si* $\omega_n < \frac{5}{2}$, *l'indice n satisfaisant aux conditions du théorème 4, il ne peut exister deux fractions rationnelles* $\frac{A(z)}{Q(z)} \in C^2(K)$ *distinctes, dont le développement commence par* $c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$.

CHAPITRE III.

Caractérisation des ensembles $S^{(h)}(K)$.

Nous allons étendre les résultats du chapitre précédent aux ensembles $h^{\text{ièmes}}$ de $S(K)$, soient $S^{(h)}(K)$.

Nous noterons par H, l'ensemble des indices $\{1, 2, \ldots, h-1\}$, I désignera un sous-ensemble quelconque de H. Enfin, nous poserons

$$M(I) = \sum_{i \in I} \mu_i, \qquad \text{avec} \quad M(\emptyset) = 0,$$

où les μ_i sont des entiers positifs ou nuls.

Théorème. — *Pour qu'un nombre* θ *appartienne à* $S^{(h)}(K)$, *il faut et il suffit qu'il existe* $2^h - 1$ *polynomes à coefficients entiers de* K : $B_I(z)$ *et* $C_I(z)$ *où* $I \subset H$, *et* $C_0(z) \equiv Q(z)$, *ayant les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout* $j \in H$, *il existe un ensemble* $J \subset H$ *tel que* $j \in J$ *et que* $i > j \Rightarrow i \notin J$, *et l'un des polynomes* $B_J(z)$ *ou* $C_J(z)$ *ne s'annule pas à l'origine.*

2. *Pour* $|z|=1$, *on a les inégalités*

$$|B_I(z)|\leq|Q(z)| \qquad \text{et} \qquad |C_I(z)|\leq|Q(z)|,$$

les égalités ayant lieu, au plus, en un nombre fini de points [*sauf pour* $C_0(z)\equiv Q(z)$].

3. *Pour tout système de* $h-1$ *entiers positifs* $\mu_1, \ldots, \mu_{h-1}$, *le polynome*

$$\sum_{I\subset H} z^{M(I)} C_I(z)$$

a un seul zéro dans $|z|<1$. *Et pour* $|z|=1$, *on a l'inégalité*

$$\left|\sum_{I\subset H} z^{M(I)} B_I(z)\right| \leq \left|\sum_{I\subset H} z^{M(I)} C_I(z)\right|,$$

l'égalité ayant lieu, au plus, en un nombre fini de points.

Ce théorème se démontre par récurrence sur h; il est facile de voir que, pour $h=2$, on obtient le théorème 3 du chapitre II. Nous supposerons donc ce théorème vrai pour $S^{(h)}(K)$ et nous le démontrerons alors pour $S^{(h+1)}(K)$.

Soit un nombre $\theta \in S^{(h+1)}(K)$, alors θ est limite d'une suite de nombres $\theta_\nu \in S^{(h)}(K)$. A chaque θ_ν, on peut associer 2^h-1 polynomes $B_{I,\nu}(z)$ et $C_{I,\nu}(z)$, où $I\subset H$, avec $C_{0,\nu}(z)=Q_\nu(z)$, et vérifiant les conditions du théorème 1.

Soit $b_{I,\nu}$ le degré de $B_{I,\nu}(z)$ et $c_{I,\nu}$ le degré de $C_{I,\nu}(z)$, nous poserons

$$\beta_\nu = \sup_{I\subset H} b_{I,\nu}, \qquad \text{et} \qquad \gamma_\nu = \sup_{I\subset H} c_{I,\nu}.$$

De la suite des indices ν, on peut extraire une suite partielle telle que :

$$\beta_\nu = b_{I_0,\nu} \qquad \text{et} \qquad \gamma_\nu = c_{I_0',\nu},$$

I_0 et I_0' ne dépendant pas de ν.

Posons alors

$$A_{\mu\nu}(z) \equiv \sum_{I\subset H} z^{M(I)} B_{I,\nu}(z).$$

$$Q_{\mu\nu}(z) \equiv \sum_{I\subset H} z^{M(I)} C_{I,\nu}(z).$$

Si l'on fixe les entiers positifs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{h-1}$, il existe pour ν assez grand deux sous-ensembles de H : J et J' tels que $A_{\mu\nu}(z)$ et $Q_{\mu\nu}(z)$ soient respectivement au plus de degrés $M(J)+b_{J,\nu}$ et $M(J')+c_{J',\nu}$; alors $\beta_\nu - b_{J',\nu}$ et $\gamma_\nu - c_{J',\nu}$ sont bornés, et quitte à extraire à nouveau une suite partielle, on peut les supposer constants. Nous poserons alors

$$\beta = \beta_\nu - b_{J,\nu}, \qquad \gamma = \gamma_\nu - c_{J',\nu}$$

et

$$\tilde{A}_{\mu\nu}(z) \equiv z^{M(J)+b_{J,\nu}}\overline{A}_{\mu\nu}\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\tilde{B}_{\mu\nu}(z) \equiv z^{M(J')+c_{J',\nu}}\overline{B}_{\mu\nu}\left(\frac{1}{z}\right),$$

alors

$$\tilde{A}_{\mu\nu}(z) \equiv \sum_{I\subset H} z^{M(J)-M(I)+b_{J,\nu}-b_{I,\nu}}\tilde{B}_{I,\nu}(z),$$

$$\tilde{Q}_{\mu\nu}(z) \equiv \sum_{I\subset H} z^{M(J')-M(I)+c_{J',\nu}-c_{I,\nu}}\tilde{C}_{i,\nu}(z),$$

$\tilde{P}(z)$ désignant le polynome réciproque d'un polynome $P(z)$, qu'on peut aussi écrire :

$$\tilde{A}_{\mu\nu}(z) \equiv z^{-\beta}\sum_{I\subset H} z^{M(J)-M(I)}B^{*}_{I,\nu}(z),$$

$$\tilde{Q}_{\mu\nu}(z) \equiv z^{-\gamma}\sum_{I\subset H} z^{M(J')-M(I)}C^{*}_{I,\nu}(z),$$

où

$$B^{*}_{I,\nu}(z) \equiv z^{\beta_\nu-b_{I,\nu}}\tilde{B}_{I,\nu}(z) \qquad \text{et} \qquad C^{*}_{I,\nu}(z) \equiv z^{\gamma_\nu-c_{I,\nu}}\tilde{C}_{I,\nu}(z)$$

sont des polynomes, et $B^{*}_{I_0,\nu}(0)\neq 0$, ainsi que $C^{*}_{I'_0,\nu}(0)\neq 0$.

Soit

$$\varphi_{\nu\mu\mu_h}(z) = \frac{\sum_{I\subset H} z^{M(I)}B_{I,\nu}(z) + z^{\mu_h+\beta_\nu+M(J)}\sum_{I\subset H} z^{M(J)-M(I)}C^{*}_{I,\nu}(z)}{\sum_{I\subset H} z^{M(I)}C_{I,\nu}(z) + z^{\mu_h+\gamma_\nu+M(J')}\sum_{I\subset H} z^{M(J)-M(I)}B^{*}_{I,\nu}(z)},$$

où μ_h est un entier positif assez grand pour que le numérateur et le dénominateur de cette fraction rationnelle soient des polynomes. Alors les fractions $\varphi_{\nu\mu\mu_h}(z)\in C(K)$ et sont associées à des nombres $\theta_{\nu\mu\mu_h}\in S(K)$.

Soit $\alpha_\nu = \inf(\beta_\nu, \gamma_\nu)$, posons

$$\mu_h + M(J) + M(J') + \alpha_\nu = \mu'_h + M, \qquad \text{avec} \quad M = M(H),$$

alors

$$\varphi_{\nu\mu\mu_h}(z) = \frac{\sum_{I\subset H} z^{M(I)}B_{I,\nu}(z) + z^{\mu'_h+\beta_\nu-\alpha_\nu}\sum_{I\subset H} z^{M-M(I)}C^{*}_{I,\nu}(z)}{\sum_{I\subset H} z^{M(I)}C_{I,\nu}(z) + z^{\mu'_h+\gamma_\nu-\alpha_\nu}\sum_{I\subset H} z^{M-M(I)}B^{*}_{I,\nu}(z)}$$

et ces fractions rationnelles appartiennent à C pour tout entier $\mu'_h > 0$.

De la suite des indices ν, on peut extraire une suite partielle, encore notée telle que

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{B_{I,\nu}(z)}{Q_\nu(z)}=\frac{B_I(z)}{Q(z)};\qquad \lim_{\nu\to\infty}\frac{C_{I,\nu}(z)}{Q_\nu(z)}=\frac{C_I(z)}{Q(z)},$$

avec $C_0(z)=Q(z)$;

$$\lim_{\nu\to\infty} z^{\beta_\nu-\alpha_\nu}\frac{C^*_{I,\nu}(z)}{Q_\nu(z)}=\frac{C^*_I(z)}{Q(z)};\qquad \lim_{\nu\to\infty} z^{\gamma_\nu-\alpha_\nu}\frac{B^*_{I,\nu}(z)}{Q_\nu(z)}=\frac{B^*_I(z)}{Q(z)}.$$

Toutes ces fractions limites appartiennent à $C^1(K)$, ou sont le produit d'une fraction de $C^1(K)$ par une puissance de z, certaines peuvent être identiquement nulles, et d'après une remarque faite plus haut, l'un des polynomes $B^*_{I_0}(z)$ ou $C^*_{I_0}(z)$ ne s'annule pas à l'origine.

Alors

$$\lim_{\nu\to\infty}\varphi_{\nu\mu\mu_h}(z)=\frac{\sum_{I\subset H} z^{M(I)}B_I(z)+z^{\mu'_h}\sum_{I\subset H} z^{M-M(I)}C^*_I(z)}{\sum_{I\subset H} z^{M(I)}C_I(z)+z^{\mu'_h}\sum_{I\subset H} z^{M-M(I)}B^*_I(z)}=f_{\mu\mu_h}(z).$$

Si l'on pose

$$H'=\{1,2,\ldots,h\};$$

et

$$B_{H'-I}(z)\equiv C^*_I(z),\qquad C_{H'-I}(z)\equiv B^*_I(z),$$

compte tenu du fait que $f_{\mu\mu_h}(z)\in C^1(K)$, nous obtenons bien les inégalités annoncées.

De même, en tout point de la circonférence-unité, on a l'inégalité

$$\left|\sum_{I\subset H} z^{M-M(I)}B^*_I(z)\right|\leq\left|\sum_{I\subset H} z^{M(I)}C_I(z)\right|,$$

on en déduit que le polynome $\sum_{I\subset H'} z^{M(I)}C_I(z)$ a un seul zéro intérieur a cercle-unité.

Réciproque. — De l'existence des 2^h-1 polynomes ayant les propriété indiquées on déduit que, si l'on pose

$$Q_{\mu_1,\ldots,\mu_h\mu}(z)=\sum_{I\subset H} z^{M(I)}C_I(z)+z^{\mu}\sum_{I\subset H} z^{M(I)}B_I(z),$$

ce polynome admet un zéro intérieur au cercle-unité $\frac{1}{\theta_{\mu_1,\ldots,\mu_{h-1},\mu}}$ et $\theta_{\mu_1,\ldots,\mu_{h-1},\mu}\in S(K)$. En faisant tendre vers l'infini sucessivement μ_1, ..., μ_{h-1} et μ, on en déduit que $\theta\in S^{(h)}(K)$.

Remarque. — Il résulte de la démonstration précédente que :

Si $\theta \in S^{(h)}(K)$, *on peut lui associer une fraction rationnelle* $\frac{A(z)}{Q(z)} \in C^{h}(K)$, *et si* θ_{μ} *est le nombre de* $S(K)$ *associé au polynome* $Q(z) + z^{\mu} A(z)$, *alors* $\theta \in S^{(h-1)}(K)$.

Inégalités entre les coefficients. — Nous avons démontré que si $\theta \in S^{(h)}(K)$, on peut lui associer une suite de fractions rationnelles de $C^{1}(K)$:

$$\frac{\sum_{I \subset II} z^{M_I} B_I(z)}{\sum_{I \subset II} z^{M_I} C_I(z)}.$$

On en déduit, par récurrence, qu'à partir d'un certain rang n_1, dépendant uniquement des polynomes $B_I(z)$ et $C_I(z)$, on a les inégalités suivantes :

$$|\varepsilon_{n+1} - s_{n+1}| \leq \omega_n - h,$$

où le développement de $\frac{B_0(z)}{Q(z)}$ au voisinage de l'origine est, $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n z^n$, les ω_n et les s_n étant les quantités définies au chapitre II.

Théorème 2. — *Si* $\theta \in S^{(h)}(K)$, *on peut lui associer une fraction rationnelle* $\frac{A(z)}{Q(z)} \in C^{h}(K)$ *admettant au voisinage de l'origine le développement*

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 z + \ldots + \varepsilon_n z^n + \ldots,$$

les quantités s_n *et* ω_n *qui lui correspondent vérifient les inégalités*

$$|\varepsilon_{n+1} - s_{n+1}| \leq \omega_n - h$$

pour $n \geq n_1$, *où* n_1 *ne dépend que de la fraction* $\frac{A(z)}{Q(z)}$.

Corollaire. — *Si* $\omega_n \leq \frac{2h+1}{2}$, *l'indice* n *satisfaisant aux conditions du théorème* 2, *il ne peut exister deux fractions rationnelles* $\frac{A(z)}{Q(z)} \in C^{h}(K)$ *distinctes dont le développement commence par*

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 z + \ldots + \varepsilon_n z^n.$$

CHAPITRE IV.

Recherche des petits éléments des ensembles étudiés.

Siegel [18] a montré que le plus petit élément de l'ensemble S est le nombre θ^*, zéro supérieur à 1 de $1+z-z^3$, alors $\theta^*=1{,}3247\ldots$. En utilisant des inégalités analogues aux précédentes, MM. Dufresnoy et Pisot [4] ont retrouvé ce résultat et ont, en plus déterminé les quatre plus petits éléments de l'ensemble S. Cette méthode leur a aussi permis de déterminer les deux plus petits éléments de S′ [7]. De même, les inégalités du chapitre II vont nous permettre de déterminer le plus petit élément de l'ensemble S″. Et les inégalités du chapitre I nous permettront de déterminer le plus petit élément, en module, d'un ensemble S(K).

1. Plus petit élément de S″. — Il est facile de voir que, pour tout entier positif μ, on a, en tout point de la circonférence-unité :

$$|1-z^{\mu}|\leq|1-2z+z^{\mu}|$$

et

$$1-z-z^{\mu-1}(1-z)|\leq|1-2z+z^{\mu}|,$$

on en déduit que $2\in S''$ et qu'on peut lui associer deux fractions de C^2 :

$$\frac{1}{1-2z} \quad \text{et} \quad \frac{1-z}{1-2z}.$$

Par une méthode analogue à celle qu'ont utilisée MM. Dufresnoy et Pisot pour déterminer les deux plus petits éléments de S′ [7], nous allons montrer qu'il n'y a pas de nombre $\theta\in S''$ qui soit inférieur à 2, *donc 2 est le plus petit élément de* S″.

Nous allons d'abord étudier les développements en série de Taylor, au voisinage de l'origine de $\frac{1}{1-2z}$ et $\frac{1-z}{1-2z}$, puis nous utiliserons ces résultats pour la recherche des fractions rationnelles de C^2, associées à des nombres $\theta<2$.

Pour les fractions rationnelles de $C=C(Q)$, MM. Dufresnoy et Pisot ont obtenu les résultats suivants, qui sont équivalents aux inégalités du chapitre I.

Posons

$$E_n(z)=Q_{n-1}(z)-z\tilde{A}_{n-1}(z),$$

$$E_n^*(z)=Q_{n-1}(z)+z\tilde{A}_{n-1}(z)$$

et soient

$$D_n(z) \qquad z^n E_n\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$D_n^*(z) \qquad z^n E_n^*\left(\frac{1}{z}\right),$$

alors, $D_n(z)$ *et* $D_n^*(z)$ *ont un seul zéro* α_n *et* α_n^* *extérieur au cercle-unité et si* θ *est le nombre associé à* $\frac{A(z)}{Q(z)}$, *on a*

$$\alpha_n \leqq \theta \leqq \alpha_n^*,$$

l'égalité n'ayant lieu que pour $n = s$. *De plus*

$$\frac{D_n(z)}{E_n(z)} = c_0 + \ldots + c_{n-1} z^{n-1} + w_n z^n + \ldots,$$

$$\frac{D_n^*(z)}{E_n^*(z)} = c_0 + \ldots + c_{n-1} z^{n-1} + w_n^* z^n + \ldots,$$

où

$$w_n \leqq c_n \leqq w_n^*,$$

l'égalité n'ayant lieu que pour $n = s$.

Alors les inégalités du théorème 4 du chapitre II s'écrivent :

$$w_n + 2 \leqq c_n \leqq w_n^* - 2.$$

Nous utiliserons aussi les relations de récurrence :

(1) $$D_{n+2}(z) \equiv (1+z) D_{n+1}(z) - z \frac{c_{n+1} - w_{n+1}}{c_n - w_n} D_n(z) \qquad \text{pour} \quad n \geqq 1,$$

(2) $$w_{n+1}^* - w_{n+1} = 2 \frac{D_{n+1}(1)}{D_n(1)} (c_n - w_n) \qquad \text{pour} \quad n \geqq 1.$$

(3) $$w_{n+1}^* - w_{n+1} = \frac{4 (w_n^* - c_n)(c_n - w_n)}{w_n^* - w_n} \qquad \text{pour} \quad n \geqq 3.$$

Pour obtenir les polynomes $D_n(z)$ et $D_n^*(z)$, il peut être commode d'utiliser, au lieu de ces relations de récurrence, le théorème 2 du chapitre I.

Nous pouvons, en effet, poser

$$\frac{D_n(z)}{E_n(z)} = \frac{A(z) U_n(z) + z^{n_1+a-s} \tilde{Q}(z) V_n(z)}{Q(z) U_n(z) + z^{n_1} \tilde{A}(z) V_n(z)},$$

$$\frac{D_n^*(z)}{E_n^*(z)} = \frac{A(z) U_n^*(z) + z^{n_1+a-s} \tilde{Q}(z) V_n^*(z)}{Q(z) U_n^*(z) + z^{n_1} \tilde{A}(z) V_n^*(z)},$$

où

$$n_1 = n \qquad \text{si} \quad a > s,$$

$$n_1 = n + s - a \qquad \text{si} \quad a < s$$

$$n_1 = n - r \qquad \text{si} \quad a = s,$$

r étant le degré le plus bas de

$$\tilde{Q}(z)\,Q(z) - A(z)\,\tilde{A}(z),$$

alors, pour $|z| = 1$:

$$|V_n(z)| = |U_n(z)| \qquad \text{et} \qquad |V_n^*(z)| = |U_n^*(z)|.$$

Sachant qu'il ne peut y avoir de simplification que par des diviseurs de $\Omega(z)$, on a une borne supérieure des degrés de $U_n(z)$ et $U_n^*(z)$ et l'on peut ensuite déterminer les coefficients de ces polynomes.

a. Étude de $\frac{1}{1-2z}$. — Au voisinage de l'origine :

$$\frac{1}{1-2z} = 1 + \ldots + 2^n z^n + \ldots$$

et

$$\Omega(z) = 2(1-z)^2,$$

alors $n_1 = n+1$, et $U_n(z)$ et $U_n^*(z)$ sont, au plus du premier degré, la simplification ne pouvant avoir lieu que par $(1-z)$ ou $(1-z)^2$. S'il y a simplification par $(1-z)$ alors $U_n(z)$ est une constante et

$$(1-z)\,D_n(z) = 1 - z^n(2-z),$$
$$(1-z)\,E_n(z) = 1 - 2z + z^{n+1},$$

d'où

$$c_n - w_n = 2,$$
$$w_n = 2^n - 2.$$

S'il y a simplification par $(1-z)^2$, posons

$$U_n^*(z) = 1 - a_n z,$$
$$V_n^*(z) = \varepsilon(z - a_n), \qquad \text{où} \quad |\varepsilon| = 1;$$

on a alors

$$U_n^*(1) + V_n^*(1) = 0, \qquad \text{donc} \quad \varepsilon = -1$$

et

$$\Delta_n = (1-z)^2 D_n^*(z) = 1 - a_n z - z^n(2-z)(z-a_n),$$

d'où

$$\Delta_n' = -a_n + n z^{n-1}(z-2)(z-a_n) + z^n(2z - a_n - 2)$$

et

$$\Delta_n'(1) = -2a_n - n(1-a_n),$$

donc

$$a_n = \frac{n}{n-2}$$

et

$$w_n^* - w_n = \frac{4(n-1)}{n-2},$$

$$w_n^* - w_n = \frac{2n}{n-2}$$

et

$$(1-z)^2 D_n^*(z) \equiv \left(1 - \frac{n}{n-2}\right) z + z^n (z-2)\left(z - \frac{n}{n-2}\right).$$

b. Étude de $\frac{1-z}{1-2z}$. — Au voisinage de l'origine :

$$\frac{1-z}{1-2z} = 1 + \ldots + 2^{n-1} z^n + \ldots$$

et

$$\Omega(z) \equiv 1 - 3z + z^2 \qquad \text{et} \qquad n_1 = n,$$

donc $U_n(z)$ et $U_n^*(z)$ sont du premier degré.

Posons alors

$$U_n(z) = 1 - a_n z,$$
$$U_n^*(z) = 1 - a_n^* z;$$

d'où

$$\Delta_n(z) \equiv (1 - 3z + z^2) D_n(z) \equiv (1-z)(1 - a_n z) + \varepsilon (2-z)(z - a_n),$$
$$\Delta_n^*(z) \equiv (1 - 3z + z^2) D_n^*(z) \equiv (1-z)(1 - a_n^* z) + \varepsilon' (2-z)(z - a_n^*),$$

on aura alors, si α est une des racines de $1 - 3z + z^2$:

$$\Delta_n(\alpha) = \Delta_n^*(\alpha) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon = 1, \qquad a_n = \frac{1 + \alpha^n}{\alpha(1 + \alpha^{n-2})},$$

$$\varepsilon' = -1, \qquad a_n^* = \frac{1 - \alpha^n}{\alpha(1 - \alpha^{n-2})},$$

on remarque, dans les deux cas étudiés, que pour $n \geq 3$, on a l'inégalité

$$w_n + 2 \leq \varphi_n \leq w_n^* - 2. \tag{4}$$

Nous allons maintenant chercher à déterminer s'il existe des fractions rationnelles de C^2 associées à des nombres $\theta < 2$. Puisque $\theta < 2$, $\alpha_n < 2$ et $D_n(2) < 0$, ce qui, compte tenu de (1) s'écrit :

$$\varphi_{n+1} - w_{n+1} < \frac{3}{2} \frac{D_{n+1}(2)}{D_n(2)} (\varphi_n - w_n) \qquad \text{pour} \quad n \geq 1. \tag{5}$$

D'autre part

$$D_1(z) \equiv \varphi_0 - z, \qquad \text{d'où} \qquad \varphi_0 = 1,$$

on a donc

$$D_2(z) \quad 1 + \frac{\varphi_1}{2} z - z^2 \qquad \text{et} \qquad D_2(2) = \varphi_1 \quad 3.$$

d'où $\varphi_1 < 3$, il y a donc deux développements possibles : (1, 1, ...) et (1, 2, ...).

Examinons d'abord le développement (1, 1, ...), on a alors

$$D_2(z) \equiv 1 + \frac{1}{2}z - z^2 \qquad \text{et} \qquad w_2 = \frac{1}{2}$$

et, d'après (5) : $\varphi_2 - w_2 < 3$, donc il y a trois développements possibles : (1, 1, 1, ...), (1, 1, 2, ...) et (1, 1, 3, ...). Mais la seule fraction de C^1 admettant le développement (1, 1, 1, ...) est $\frac{1-z^2}{1-z-z^2}$ qui n'appartient pas à C^2 [7]. Il nous reste donc à étudier les développements (1, 1, 2, ...) et (1, 1, 3, ...).

Auparavant, nous allons examiner les développements (1, 2, ...), alors

$$D_2(z) \equiv 1 - z - z^2 \qquad \text{et} \qquad w_2 = 2$$

et, d'après (5), nous devons avoir $\varphi_2 - w_2 < 3$, il y a donc deux développements possibles : (1, 2, 3, ...) et (1, 2, 4, ...).

Montrons maintenant que l'inégalité (4) est valable pour $n \geqq 3$, c'est-à-dire que $r_1 \leqq 2$, où r_1 est le degré le plus bas du polynome

$$A(z)\,C(z) - B(z)\,Q(z),$$

$B(z)$ et $C(z)$ étant les polynomes introduits au chapitre II. Si B(o) ou C(o) est nul, ou bien si ces nombres sont de signes contraires, on a $r_1 = 0$. Si B(o) et C(o) sont de même signe, on aura

$$\frac{A(z)}{Q(z)}\,\frac{C(z)}{Q(z)} - \frac{B(z)}{Q(z)} = z^{r_1}(\ldots)$$

et les fractions $\frac{B(z)}{Q(z)}$ et $\frac{C(z)}{Q(z)}$ auront un développement de l'une des formes indiquées, donc

$$\frac{A(z)}{Q(z)}\,\frac{C(z)}{Q(z)} = 1 + \lambda z + \mu z^2 + \ldots,$$

où $\mu \geqq 5$, on a donc $r_1 \leqq 2$.

Revenons au développement (1, 1, 3, ...), alors

$$D_3(z) \equiv 1 - z + 2z^2 - z^3 \qquad \text{et} \qquad w_3 = 5,$$

D'après (5), on doit avoir $\varphi_3 - w_3 < \frac{15}{8} < 2$, donc ce développement ne correspond à aucune fraction de C^2.

Examinons maintenant le développement (1, 1, 2, ...), alors

$$D_3(z) \equiv 1 + z^2 - z^3 \qquad \text{et} \qquad w_3 = 5$$

d'après (5), il faut $\varphi_3 - \varpi_3 < \frac{27}{8}$, et il y a encore deux développements possibles (1, 1, 2, 4, ...) et (1, 1, 2, 5, ...).

Examinons d'abord le développement (1, 1, 2, 5, ...), on a

$$D_4(z) \equiv 1 - z + 2z^3 - z^4 \qquad \text{et} \qquad \varpi_4 = 9$$

d'après (5), on doit avoir $\varphi_4 - \varpi_4 < \frac{3}{2}$, il n'y a donc pas de fraction de C^2 correspondant à ce développement.

Il reste le développement (1, 1, 2, 4, ...), alors

$$D_4(z) \equiv 1 - \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}z^2 + \frac{4}{3}z^3 - z^4 \qquad \text{et} \qquad \varpi_4 = 5\frac{2}{5}$$

d'après (5), il faut $\varphi_4 - \varpi_4 < \frac{11}{3}$, il y a donc deux développements possibles (1, 1, 2, 4, 9, ...) et (1, 1, 2, 4 8 ...).

Examinons le développement (1, 1, 2 4, 9, ...), alors

$$D_5(z) \equiv 1 - z + 2z^4 - z^5 \qquad \text{et} \qquad \varpi_5 = 17$$

d'après (5), on doit avoir $\varphi_5 - \varpi_5 < \frac{15}{11}$ et il n'y a pas de fraction de C^2 correspondant à ce développement.

Il reste le développement (1, 1, 2, 4, 8, ...), alors

$$D_5(z) \equiv 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{3}{2}z^4 - z^5 \qquad \text{et} \qquad \varpi_5 = 13{,}5,$$

$\varpi_5^* - \varpi_5 = \frac{21}{4}$ et seule la valeur $\varphi_5 = 16$ vérifie l'inégalité (4). Le seul développement possible est donc (1, 1, 2, 4, 8, 16, ...), il coïncide jusqu'à l'ordre 5 avec celui de $\frac{1-z}{1-2z} = 1 + \ldots + 2^{n-1}z^n + \ldots$; nous allons montrer que le seul développement possible est effectivement celui-là, pour cela, il suffit de montrer que 2^{n-1} est le seul entier vérifiant (4) pour $n \geq 5$.

Pour $n = 5$ $\varpi_n^* - \varpi_n \leq 5$, et l'on voit facilement que $d_n = s_n - \varphi_n$ est nne fonction décroissante de n, or $d_4 = \frac{1}{3}$, donc pour $n \geq 4$: $d_n < \frac{1}{3}$ et $\varpi_n^* - 2^{n-1} < 3$ et $2^{n-1} - \varpi_n < 3$, donc le seul développement possible est bien celui de $\frac{1-z}{1-2z}$.

Il nous reste à examiner les développements (1, 2, 3, ...) et (1, 2, 4, ...).

Considérons d'abord le développement (1, 2, 3, ...), alors

$$D_3(z) \equiv 1 + \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}z^2 - z^3 \qquad \text{et} \qquad \varpi_3 = \frac{9}{2}$$

avec $w_3^* - w_3 = 4$, il n'y a donc pas d'entier vérifiant (4) et ce développement ne correspond pas à une fraction de C^2.

Examinons alors le développement (1, 2, 4, ...), on a

$$D_3(z) \equiv 1 + z + z^2 - z^3 \qquad \text{et} \qquad w_3 = 6$$

d'après (5), il faut $v_3 - w_3 < 3$ donc $v_3 = 8$ et $\frac{A(z)}{Q(z)}$ doit admettre le développement (1, 2, 4, 8, ...). Ce développement coïncide jusqu'à l'ordre 4 avec celui de $\frac{1}{1-2z}$; nous allons montrer que ce développement est le seul possible, c'est-à-dire que 2^n est le seul nombre vérifiant (4) pour $n \geq 4$.

En effet, supposons que les développements coïncident jusqu'à l'ordre m, on aura

$$A_m(z) \equiv (1-z) D_m(z) \equiv 1 - 2z^m + z^{m+1} \qquad \text{et} \qquad D_m(2) = -1,$$

donc (5) s'écrit

$$v_{m+1} - w_{m+1} < 3 \quad \text{et} \quad v_{m+1} = 2^{m+1}.$$

Le seul développement possible est donc celui de $\frac{1}{1-2z}$. Et il n'y a pas de nombre $\theta < 2$ qui appartienne à S″, donc 2 est bien le plus petit élément de S″.

2. Plus petit élément d'un ensemble S(K). — Si θ_0 est le plus petit élément, en module, d'un ensemble S(K), on a nécessairement $|\theta_0| \leq \theta^*$; d'autre part, M^lle Chamfy [1] a montré que les plus petits éléments, en module, de S_2 sont les nombres $\pm i\sqrt{\theta^*}$, or, on voit facilement que ces nombres n'appartiennent à aucun ensemble S(K). Nous allons donc chercher des nombres de S(K) vérifiant les inégalités

$$\sqrt{\theta^*} < |\theta| < \theta^* = 1{,}3247\ldots$$

Soit $\frac{A(z)}{Q(z)}$ une fraction rationnelle associée au nombre θ cherché. Soit

$$g(z) = \frac{A(z)}{Q(z)} \frac{1-\theta z}{\theta - z} = g_0 + g_1 z + \ldots + g_n z^n + \ldots,$$

alors $g(z)$ est une fonction de Schur et

$$|g(0)| = |g_0| \leq 1,$$

or

$$g_0 = \frac{1}{\theta} c_0, \qquad \text{d'où} \qquad |c_0| = 1,$$

$$g_1 = \frac{1}{\theta}\left(c_1 + \frac{1-\theta^2}{\theta} c_0\right),$$

$$g_n = \frac{1}{\theta}\left(c_n + \frac{1-\theta^2}{\theta} c_{n-1} + \ldots + \frac{1-\theta^2}{\theta^n} c_0\right).$$

Pour tout entier $k > 0$, posons

$$g_k^*(z) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1} g(\eta_j z), \qquad \text{où} \qquad \eta_j^k = 1,$$

$g_k^*(z)$ est aussi une fonction de Schur, et

$$|g_k'^*(0)| \leq 1 - |g_0|^2. \tag{1}$$

Quitte à multiplier la fonction par une unité de K, on peut supposer $\varphi_0 = 1$. Pour $k = 1$, l'inégalité (1) s'écrit :

$$\left|\varphi_1 + \frac{1-|\theta|^2}{\theta}\right| \leq 1 - \frac{1}{|\theta|^2},$$

d'où

$$|\varphi_1| < 2\left(|\theta| - \frac{1}{|\theta|}\right), \qquad \text{c'est-à-dire} \quad |\varphi_1| < 1{,}16,$$

on a donc $|\varphi_1| = 1$ et quitte à multiplier θ par une unité de K, on peut supposer $\varphi_1 = 1$.

Nous sommes donc amenés à étudier les fractions rationnelles de C admettant le développement $(1, 1, \varphi_2, \ldots)$. Nous pouvons former les polynomes

$$A_2(z) \equiv 1 + \frac{1-\varphi_2}{\varphi_1} z - z^2,$$

$$Q_2(z) \equiv 1 - \frac{\varphi_2}{\varphi_1} z - z^2,$$

d'où

$$\omega_2 = |\varphi_2|^2 - |1-\varphi_2|^2$$

pour que $\omega_2 \geq 0$, il faut donc que $R(\varphi_2) \geq \frac{1}{2}$.

D'autre part, d'après l'inégalité (1), on a

$$|\varphi_2| < 2\frac{|\theta|^2 - 1}{|\theta|} + 1 - \frac{1}{|\theta|^2} < 1{,}6,$$

on peut donc avoir

$$|\varphi_2| = 1 \qquad \text{ou} \qquad |\varphi_2| = \sqrt{2};$$

de plus, si φ_2 est imaginaire, on peut, quitte à changer θ et $\bar{\theta}$, supposer que $\mathcal{I}(\varphi_2) \geq 0$. Maintenant, nous allons distinguer les différents corps :

a. Si K *est le corps* $Q(i)$, *alors on peut avoir les deux développements* $(1, 1, 1, \ldots)$ *ou* $(1, 1, 1+i, \ldots)$.

b. Si K *est le corps* $Q(i\sqrt{3})$ (*corps des racines cubiques de l'unité*), *on peut avoir les deux développements* $(1, 1, 1, \ldots)$ *ou* $\left(1, 1, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \ldots\right)$.

c. Si K *est le corps* $Q(i\sqrt{7})$ *on peut avoir les deux développements* $(1, 1, 1, \ldots)$ *ou* $\left(1, 1, \frac{1+i\sqrt{7}}{2}, \ldots\right)$.

d. Si K *n'est pas l'un des corps précédents, on a le seul développement* $(1, 1, 1, \ldots)$.

Étudions d'abord le développement $(1, 1, 1, \ldots)$, alors

$$A_2(z) \equiv 1 - z^2,$$
$$Q_2(z) \equiv 1 - z - z^2, \qquad \omega_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad s_3 = 2,$$

la fraction $\frac{A(z)}{Q(z)}$ cherchée est donc nécessairement de la forme

$$\frac{A(z)}{Q(z)} = \frac{1 - z^2 - \gamma_1 z^m (1 + z - z^2)}{1 - z - z^2 + \gamma_1 z^m (1 - z^2)},$$

où γ_1 est une unité de K. Si K n'est pas l'un des corps $Q(i)$ ou $Q(i\sqrt{3})$, on obtient des nombres de S, si K est l'un de ces corps, on obtient encore des nombres de module supérieur à $\theta^\star$.

Dans le corps $Q(i)$, étudions le développement $(1, 1, 1+i, \ldots)$; alors

$$A_2(z) \equiv 1 - iz - z^2,$$
$$Q_2(z) \equiv 1 - (1+i)z - z^2, \qquad \omega_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad s_3 = 1 + 2i,$$

on doit donc avoir

$$|\rho_3 - (1 + 2i)| \leq 1$$

et d'après (1) :

$$|\rho_3| \leq 2,24.$$

On peut donc avoir les trois développements : $(1, 1, 1+i, 1+i, \ldots)$, $(1, 1, 1+i, 2i, \ldots)$ et $(1, 1, 1+i, 1+2i, \ldots)$.

Examinons le développement $(1, 1, 1+i, 2i, \ldots)$, alors

$$\frac{A(z)}{Q(z)} = \frac{1 + (1-i)z - iz^2 - z^3}{1 - iz - (1+i)z^2 - z^3},$$

mais le nombre θ correspondant a un module supérieur à $\theta^\star$.

Dans le cas du développement $(1, 1, 1+i, 1+i, \ldots)$, on obtient

$$\frac{A(z)}{Q(z)} = \frac{1 + iz^2 - iz^3}{1 - z - iz^3}$$

et le nombre θ correspondant est encore de module supérieur à $\theta^\star$.

De même, pour le développement $(1, 1, 1+i, 1+2i, \ldots)$, on obtient les fractions rationnelles

$$\frac{A(z)}{Q(z)} = \frac{1 - iz - z^2 + \gamma_1 z^n |1 + (1-i)z - z^2|}{1 - (1+i)z - z^2 + \gamma_1 z^n (1 - iz - z^2)},$$

où $\eta_1^3 = 1$, et les nombres θ correspondants ont encore leur module supérieur à θ^*.

Dans le corps des racines cubiques de l'unité, examinons le développement $\left(1, 1, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \cdots\right)$, alors

$$\frac{A(z)}{Q(z)} = \frac{1-\rho z - z^2}{1 - \rho z - z^2}, \qquad \text{où} \quad \rho = \frac{1+i\sqrt{3}}{2},$$

alors

$$|\theta| = 1,3\ldots < \theta^*.$$

Il nous reste à étudier le développement $\left(1, 1, \frac{1+i\sqrt{7}}{2}, \cdots\right)$, alors $\frac{A(z)}{Q(z)}$ a la même forme que plus haut, mais $\rho = \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$ et le nombre θ correspondant a son module supérieur à θ^*.

Donc le seul nombre $\theta \in S(K)$, *de module inférieur à* θ^* *est le nombre* θ_0, *zéro extérieur au cercle-unité de* $1 + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} z - z^2$ *et si* K *n'est pas le corps des racines cubiques de l'unité,* θ^* *est le plus petit élément de l'ensemble* S(K).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Mlle C. Chamfy, *Fonctions méromorphes dans le cercle-unité et leurs séries de Taylor* (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 8, 1958, p. 211-261).

[2] Mlle M. Doubrère, *Sur les points limites d'un ensemble remarquable d'entiers algébriques imaginaires* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 240, 1955, p. 2111-2133).

[3] J. Dufresnoy, *Le problème des coefficients pour certaines fonctions méromorphes dans le cercle-unité* (*Ann. Acad. Sc. Fennicae*, série A, n° 250/9, 1958).

[4] J. Dufresnoy et C. Pisot, *Sur un ensemble formé d'entiers algébriques* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 70, 1953, p. 105-133).

[5] J. Dufresnoy et C. Pisot, *Sur les dérivés successifs d'un ensemble fermé d'entiers algébriques* (*Bull. Sc. Math.*, t. 77, 1953, p. 129-136).

[6] J. Dufresnoy et C. Pisot, *Étude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle-unité, application à un ensemble fermé d'entiers algébriques* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 72, 1955, p. 69-92).

[7] J. Dufresnoy et C. Pisot, *Sur les éléments d'accumulation d'un ensemble fermé d'entiers algébriques* (*Bull. Sc. Math.*, t. 79, 1955, p. 54-64).

[8] Mme M. Grandet, *Sur un ensemble d'entiers algébriques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 252, 1961, p. 1542-1543).

[9] Mme M. Grandet, *Sur les dérivés d'un ensemble d'entiers algébriques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 254, 1962, p. 2905-2906).

[10] J. B. Kelly, *A closed set of algebraic integers* (*Amer. J. Math.*, t. 72, 1950, p. 565-572).

[11] C. Pisot, *La répartition modulo 1 et les nombres algébriques* (*Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, série 2, t. 7, 1938, p. 205-248).

[12] C. Pisot, *Ensembles fermés de nombres algébriques et familles normales de fractions rationnelles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 256, 1963, p. 1418-1419).

[13] R. Salem, *A remarkable class of algebraic integers. proof of a conjecture of Vijayaraghavan* (*Duke Math. J.*, 11, 1944, p. 103-108).
[14] R. Salem, *Powers series with integral coefficients* (*Duke Math. J.*, t. 12, 1945, p. 153-172).
[15] R. Salem, *Algebraic numbers and Fourier analysis* (*Heath mathematical monographs*, Boston, U. S. A., 68 pages).
[16] P. A. Samet, *Algebraic integers with two conjugates outside the uni-circle* (*Proc. Cambridge Phil. Soc.*, t. 49, 1953, p. 421-436 et t. 50, 1954, p. 346).
[17] J. Schur, *Uber Potenzreihen, die im innern des Einheitskreises beschränkt sind* (*J. F. R. U. ang Math.*, t. 147, 1917, p. 205-232 et t. 148, 1918, p. 122-145).
[18] C. L. Siegel, *Algebraic integers whose conjugates lie in the unitcircle* (*Duke Math. J.*, t. 11, 1944, p. 597-602).

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I. — Fonctions méromorphes du cercle-unité 3

CHAPITRE II. — Caractérisation des ensembles $S''(K)$ 13

CHAPITRE III. — Caractérisation des ensembles $S^{(h)}(K)$ 20

CHAPITRE IV. — Plus petits éléments des ensembles S'' et $S''(K)$ 25

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Travaux de Mandelbrojt sur les classes quasi-analytiques de Gelfand et Chilov

Vu et approuvé :

Paris, le 2 avril 1964.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKY

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS & Cie
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

166365-65

Dépôt légal, Imprimeur, 1965, n° 1718.

Imprimé en France

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS & C^ie^
Quai des Grands-Augustins, 55.
166365-65

Dépôt légal, Imprimeur, 1965, n° 1718.

Imprimé en France.